Lacroix

(Lacroix)
OKF

ÉLÉMENTS

DE GÉOMÉTRIE.

Cet ouvrage se trouve aussi :

A ANGOULÊME. . chez PEREZ-LECLER.
BORDEAUX. . . — CHAUMAS.
BOURGES. . . . — VERMEIL.
BREST. . . . . — Mme Vve LEFOURNIER.
LILLE. . . . . — VANACKÈRE.
LORIENT. . . . — LEROUX-CASSART.
LYON. . . . . — PERISSE frères.
— GIBERTON et BRUN.
MARSEILLE. . . — Mme Vve CAMOIN.
METZ. . . . . — WARION.
MONTPELLIER. — SÉWALLE.
NANCY. . . . . — G. GRIMBLOT et Cie.
NANTES. . . . — FOREST aîné.
— GUÉRAUD.
— PETITPAS.
ORLÉANS. . . . — GATINEAU.
RENNES. . . . . — VERDIER.
ROCHEFORT. . — Mme FLEURY.
— PROUST-BRANDAY.
ROUEN. . . . . — LEBRUMENT.
STRASBOURG. . — TREUTTEL et WURTZ.
— Mme LEVRAULT.
— DERIVAUX.
TOULON. . . . — MONGE et WILLAMUS.
TOULOUSE. . . — Mlles GALLON sœurs.
— BON et PRIVAT.
— GIMET.

LEIPZIG. . . . . — MICHELSEN.
LONDRES. . . . — DULAU et Cie, Soho-Square.
— BAILLIÈRE.
MADRID . . . . — A. POLPART et frère.
— JAYMEBON et Cie.
— MONIER.
TURIN . . . . . — BOCCA.
VIENNE. . . . . — ROHMANN.

IMPRIMERIE DE BACHELIER
rue du Jardinet, 12.

ÉLÉMENTS
DE GÉOMÉTRIE,

A L'USAGE

DE L'ÉCOLE CENTRALE DES QUATRE-NATIONS;

PAR S.-F. LACROIX.

SEIZIÈME ÉDITION,
REVUE ET CORRIGÉE.

PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC.,
Quai des Augustins, n° 55.

1848.

Circulaire de Monsieur le **Ministre de l'Instruction publique** *à* **MM.** *les Recteurs.*

Paris, 17 octobre 1838.

Monsieur le Recteur,

Les principaux Libraires de Paris qui s'occupent de la publication des Livres employés dans l'enseignement, en me faisant connaître qu'il existe de nombreuses contrefaçons de ces ouvrages, se plaignent de la facilité avec laquelle elles sont introduites dans les Colléges et dans les Écoles primaires, où leur prix semble, disent-ils, les faire préférer aux éditions originales. De là le double inconvénient de propager l'usage d'*éditions incorrectes* et de décourager les Éditeurs légitimes qui, trompés dans leurs prévisions, sont souvent forcés de renoncer, au détriment de la science, à améliorer et même à publier des ouvrages qu'ils craignent de ne pouvoir exploiter sans dommages et sans troubles.

Vous voudrez bien, en conséquence, monsieur le Recteur, inviter les chefs d'établissements d'instruction secondaire et d'instruction primaire à prendre des précautions pour qu'*aucune édition contrefaite* ne soit à l'avenir admise dans les Colléges et dans les Écoles. Vous appellerez leur attention sur les inconvénients qui résultent, pour les études, de l'*incorrection de ces éditions*. Il y a d'ailleurs, dans le fait de la contrefaçon, une action coupable que la loi et la morale réprouvent également, et dont aucun membre de l'Université ne voudra, j'en suis assuré, se rendre complice. Je vous invite à rappeler à MM. les chefs d'établissements de tous les degrés qu'ils ne doivent employer que des Livres régulièrement approuvés ou autorisés par l'Université, et à leur faire remarquer que comme l'indication du nom de l'Éditeur accompagne toujours le titre des ouvrages dans les notifications des décisions dont ces ouvrages ont été l'objet, toute erreur est facile à éviter. L'intérêt des études leur prescrit d'y veiller.

Le Ministre de l'Instruction publique, grand maître de l'Université,

Signé SALVANDY.

Par acte authentique entre Monsieur et Madame Lacroix, M. Bachelier est aujourd'hui *seul* propriétaire des *OEuvres* de S.-F. Lacroix.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la griffe du Libraire-Propriétaire, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.

Bachelier

AVIS DU LIBRAIRE.

Ce volume fait partie du Cours élémentaire de Mathématiques pures *de S.-F. Lacroix, Cours qui comprend l'*Arithmétique, *l'*Algèbre, *la* Géométrie, *la* Trigonométrie rectiligne et sphérique, *ainsi que l'*Application de l'Algèbre à la Géométrie. *On trouvera dans les* Essais sur l'Enseignement, *du même Auteur, l'analyse de chacune de ces parties, auxquelles sont suite le* Complément des Éléments de Géométrie (*ou* Éléments de Géométrie descriptive), *le* Complément des Éléments d'Algèbre, *le* Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral, *et le* Traité élémentaire du Calcul des Probabilités.

L'auteur de ces Éléments, ayant réuni dans ses Essais sur l'Enseignement en général, et sur celui des Mathématiques en particulier, *tout ce qu'il avait écrit sur la métaphysique de ces sciences, a fait entrer dans ce dernier ouvrage, et avec des augmentations, les Discours qu'on trouvait à la tête du premier, sous le titre de*

Réflexions sur l'ordre à suivre dans les *Éléments de Géométrie,* sur la manière de les écrire et sur la méthode en Mathématiques. *Ces divers morceaux font maintenant partie d'un corps complet de remarques sur toutes les branches de l'Enseignement des Mathématiques élémentaires.*

On peut joindre aux Éléments de Géométrie *leur* Complément, *ayant aussi pour titre:* Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes (*ou* Éléments de Géométrie descriptive), 6ᵉ *édition, qui se trouve chez le même libraire.*

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

Circulaire de Monsieur le Ministre de l'Instruction publique à MM. les Recteurs IV

Avis du Libraire V

SUPPLÉMENT au *Traité d'Arithmétique* XLV

Articles concernant le *toisé*. LV

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE.

Notions générales sur l'étendue. 1

1. L'espace que les corps occupent a trois dimensions, *longueur, largeur* et *profondeur* ou *épaisseur;* — Les limites des corps sont des *surfaces,* et n'ont que deux dimensions, *longueur* et *largeur;* — Les limites des surfaces, ou leurs rencontres mutuelles, sont des *lignes,* et n'ont qu'une seule dimension, *longueur;* — Les limites des lignes, ou leurs rencontres mutuelles, sont des *points,* qui n'ont aucune dimension. . . . . *Ib.*

2. La ligne droite est le plus court chemin pour aller d'un point à un autre; — Une ligne droite est déterminée par deux points, et ne peut se prolonger au delà que d'une seule manière; — Le plan est une surface à laquelle on peut appliquer une ligne droite dans tous les sens. . . 2

PREMIÈRE PARTIE.

SECTION PREMIÈRE.

Des propriétés des lignes droites et circulaires.

Définitions et notions préliminaires. 3

3. On ne considère, dans les *Éléments de Géométrie,* que deux espèces de lignes, savoir : la *ligne droite* et la *ligne circulaire* dont tous les points, situés sur le même

Pages.

plan, sont également éloignés d'un autre point pris dans ce plan, et qu'on nomme le *centre;* — Les droites qui mesurent la distance des points quelconques de la circonférence à son centre sont les *rayons* du cercle; — Une partie quelconque de sa circonférence se nomme *arc;* — On entend par *cercle* la portion du plan terminée de toutes parts par la ligne circulaire; — Pour trouver tous les points qui sont à une distance donnée d'un point donné, il faut décrire de ce dernier comme centre, et avec un rayon égal à la distance donnée, une circonférence de cercle . . . . *Ib.*

4. Mesurer la distance de deux points ou la longueur d'une droite, c'est chercher combien de fois cette droite en contient une autre prise pour unité; — En général, mesurer une ligne par une autre, c'est chercher le rapport de ces deux lignes ou chercher s'il n'y a pas une ligne plus petite qui soit contenue un nombre exact de fois dans l'une et dans l'autre, et qui, par conséquent, soit la commune mesure des deux. 4

5. *Problème.* — Deux droites étant données, trouver leur commune mesure, ou au moins le rapport approché de l'une à l'autre. *Ib.*

6. Une droite n'en peut rencontrer une autre qu'en un seul point 5

7. L'espace indéfini compris entre deux droites qui se coupent en un point, et qu'on peut concevoir prolongées autant qu'on le voudra, se nomme *angle;* — Le point où se rencontrent les lignes ou les *côtés* qui forment l'angle, se nomme *sommet*. . . . . *Ib.*

8. Deux angles sont égaux lorsqu'étant posés l'un sur l'autre, ils se recouvrent parfaitement; — Il n'est pas nécessaire, pour que l'égalité ait lieu, que les côtés d'un angle aient la même longueur que ceux de l'autre; il suffit seulement qu'ils se recouvrent dans la partie qui leur est commune. 6

9. La position respective de deux droites dépend de l'angle qu'elles font entre elles; — Une ligne est *perpen-*

Pages.

diculaire sur une autre quand elle fait avec cette autre deux angles égaux; — La perpendiculaire ne penche vers aucun côté de la droite qu'elle rencontre; — Les angles qu'elles forment sont nommés *angles droits;* — Tout angle moindre qu'un droit se nomme *angle aigu;* — Tout angle plus grand qu'un droit se nomme *angle obtus;* — Tous les angles droits sont égaux. 6

10. La somme de tous les angles qu'on peut faire du même côté d'une droite et autour d'un de ses points pris pour sommet, équivaut toujours à deux droits, en quelque nombre que soient ces angles 7

11. Lorsqu'une droite tombe sur une autre, elle fait avec cette autre deux angles qui, réunis, valent deux droits; — Deux droites qui se coupent forment autour de leur point de rencontre quatre angles qui sont *opposés par le sommet* deux à deux . . . . *Ib.*

12. *Théorème.* — Les angles opposés par le sommet sont égaux. . . . . *Ib.*

13. *Corollaire.* — Deux perpendiculaires forment entre elles quatre angles droits; — La somme de tous les angles qu'on peut former autour d'un point ne vaut jamais que quatre droits. 8

14. On ne peut enfermer un espace par un nombre de droites moindres que trois; cet espace se nomme *triangle.* *Ib.*

15. *Remarques.* — La somme de deux côtés quelconques d'un triangle surpasse toujours le troisième; — Si l'on prend dans l'intérieur d'un triangle un point quelconque et qu'on tire des droites de ce point à deux angles du triangle, la somme de ces droites sera moindre que celle des deux côtés du triangle qui les enveloppent; — On distingue six choses dans un triangle, savoir, trois angles et trois côtés; — Il y a entre ces six choses des relations nécessaires. . . . . *Ib.*

16. *Théorème.* — Lorsque deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, ces triangles sont égaux dans toutes leurs parties. 9

17. *Corollaire.* — Un triangle est entièrement déter-

Pages.

miné par l'un de ses angles et les deux côtés qui le comprennent 10

18. *Théorème.* — Lorsque deux triangles ont chacun à chacun un côté égal adjacent à deux angles égaux, ces triangles sont égaux dans toutes leurs parties . . . . . . *Ib.*

19. *Théorème.* — Si deux côtés d'un triangle sont respectivement égaux à deux côtés d'un autre triangle, et que l'angle compris entre les deux premiers soit moindre que l'angle compris entre les deux derniers, le côté opposé au plus petit de ces deux angles sera moindre que le côté opposé à l'autre 11

20. *Corollaire.* — Deux triangles sont égaux dans toutes leurs parties, quand les trois côtés de l'un sont égaux aux trois côtés de l'autre 12

21. *Problème.* — Les trois côtés d'un triangle étant donnés séparément, décrire le triangle 13

22. *Remarques.* — Pour qu'on puisse former un triangle avec trois lignes données, il faut que la somme de deux quelconques de ces droites soit plus grande que la troisième. . . . . *Ib.*

23. *Problème.* — Par un point donné pris sur une ligne donnée, faire un angle qui soit égal à un angle donné 14

24. *Problème.* — Un triangle étant donné, en construire un autre qui lui soit égal, en employant à la construction de ce dernier un angle du premier et les deux côtés qui le comprennent. *Ib.*

25. *Problème.* — Un triangle étant donné, en construire un autre qui lui soit égal, en employant à la construction de ce dernier un côté du premier et les deux angles adjacents. 15

Des lignes perpendiculaires et des obliques. . . . . . *Ib.*

26. *Théorème.* — Les lignes qui partent d'un point quelconque de la perpendiculaire, et qui s'écartent également de son pied, sont égales, et celles qui s'en écartent le plus sont les plus longues. . . . . *Ib.*

Pages.

27. 1er *corollaire.* — Deux obliques qui sont égales tombent nécessairement de différents côtés de la perpendiculaire, mais à égale distance de son pied. 16

28. 2e *corollaire.* — La perpendiculaire est la plus courte de toutes les lignes que l'on peut mener d'un point à une ligne donnée; lorsqu'elle tombe sur le milieu de cette droite, elle a tous ses points à égale distance des deux extrémités, et tous les points pris hors de la perpendiculaire sont inégalement éloignés de ces extrémités. D'un point à une droite on ne saurait tirer trois droites égales. . *Ib.*

29. *Problème.* — Mener sur une ligne donnée une perpendiculaire qui la partage en deux parties égales 17

30. *Problème.* — Par un point donné sur une droite élever une perpendiculaire à cette droite . . . . *Ib.*

31. *Problème.* — Par un point donné pris hors d'une droite abaisser une perpendiculaire sur cette droite. . . . 18

32. *Théorème.* — D'un point pris hors d'une droite on ne peut abaisser sur cette droite qu'une seule perpendiculaire. La même chose a lieu pour tout point pris sur la ligne donnée. . . . . *Ib.*

33. 1er *corollaire.* — Deux droites perpendiculaires à une troisième ne se rencontrent point, quelque prolongées qu'on les suppose, soit au-dessus, soit au-dessous de cette dernière. 19

34. 2e *corollaire.* — Deux triangles qui ont chacun un angle droit sont égaux: 1° lorsque leurs côtés respectivement opposés aux angles droits, ainsi qu'un de leurs autres angles, sont égaux; 2° lorsque, outre les côtés opposés aux angles droits, ils ont encore un côté égal chacun à chacun. *Ib.*

35. *Remarques.* — Le second cas de l'égalité qu'on a prouvé ci-dessus pour les triangles qui ont un angle droit ne convient pas généralement à tous les autres. 20

36. *Théorème.* — Lorsque deux côtés d'un triangle sont égaux, les angles opposés à ces côtés sont égaux; et lorsqu'ils sont inégaux, le plus grand des deux est opposé au plus grand angle . . . . *Ib.*

37. *Corollaire.* — Si deux angles d'un triangle sont

Pages.

égaux entre eux, les côtés opposés à ces angles sont aussi égaux entre eux. Le plus grand des deux côtés est celui qui est opposé au plus grand angle. Enfin, quand les trois côtés d'un triangle sont égaux, les trois angles le sont aussi, et réciproquement. 21

38. Les triangles dont les côtés sont inégaux se nomment *scalènes;* ceux qui ont deux côtés égaux se nomment *isocèles,* et ceux dont les trois côtés sont égaux se nomment *équilatéraux*. 22

Des lignes parallèles . . . . *Ib.*

39. Deux droites qui, quoique situées dans un même plan, ne se rencontrent pas, sont dites *parallèles* entre elles; — Deux perpendiculaires à une même droite sont donc parallèles. . . . . *Ib.*

40. *Remarque.* — Une droite étant perpendiculaire sur une autre, toute droite qui sera oblique à celle-ci, étant prolongée suffisamment, rencontrera nécessairement la première. . . . . *Ib.*

Note où l'on prouve cette proposition 23

41. *Théorème.* — Lorsque deux droites sont parallèles, toutes celles qui sont perpendiculaires sur l'une le sont en même temps sur l'autre 24

42. *Corollaire.* — Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles. . . . . *Ib.*

43. *Théorème.* — Lorsque deux droites parallèles entre elles sont coupées par une troisième, les angles qu'elles font avec cette dernière, d'un même côté, l'un en dehors, l'autre en dedans, sont égaux entre eux. 25

44. *Théorème.* — Si deux droites font avec une troisième, et d'un même côté, par rapport à celle-ci, des angles égaux, l'un en dedans, l'autre en dehors, ces deux droites sont parallèles entre elles . . . . *Ib.*

45. *Remarques.* — On appelle *sécante* toute droite qui coupe des parallèles. Les angles situés du même côté de la sécante, et dont l'ouverture est tournée du même côté, se nomment *angles correspondants*. Tous les angles dont

Pages.

l'ouverture est entre les parallèles se nomment *angles internes*, et l'on appelle *angles externes* ceux dont l'ouverture est en dehors. Les angles qui sont dans une situation opposée, tant par rapport à la sécante que par rapport aux parallèles, se nomment *angles alternes*. 25

46. *Théorème.*—Lorsque deux parallèles sont coupées par une sécante : 1° Les angles correspondants sont égaux; — 2° Les angles alternes-internes sont égaux; — 3° Les angles alternes-externes sont égaux;—4° Les angles internes d'un même côté forment deux angles droits; — 5° Les angles externes d'un même côté forment deux angles droits. Réciproquement, si l'une quelconque de ces propriétés a lieu, les droites sont nécessairement parallèles. . 27

47. *Corollaire.* — Deux droites respectivement perpendiculaires à deux autres droites qui se coupent doivent nécessairement se rencontrer 29

48. *Problème.* — Par un point donné mener une droite parallèle à une droite donnée. . . . . *Ib.*

49. *Problème.* — Par un point donné pris hors d'une droite en mener une autre qui fasse avec la première un angle égal à un angle donné . . . . *Ib.*

50. *Théorème.* — Les angles qui ont les côtés parallèles et l'ouverture placée dans le même sens sont égaux . . . 30

51. *Théorème.* — Les trois angles d'un triangle réunis valent toujours deux angles droits . . . . *Ib.*

N. B. — L'angle *extérieur* d'un triangle vaut à lui seul les deux angles intérieurs opposés. 31

52. *Corollaire.* — Quand deux angles d'un triangle sont respectivement égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisième angle de l'un est égal au troisième angle de l'autre; — Un triangle ne peut avoir qu'un seul angle droit, et, à plus forte raison, qu'un seul angle obtus . . *Ib.*

53. On nomme triangle *rectangle* celui qui a un angle droit, *acutangle* celui qui n'a que des angles aigus, et *obtusangle* celui qui a un angle obtus; les deux dernières espèces sont comprises sous la dénomination de triangles *obliquangles*. Dans le triangle équilatéral, dont tous les angles sont égaux, chaque angle est les deux tiers d'un droit. . . . .

54. *Théorème.* — Les parties de parallèles interceptées entre parallèles sont égales, et réciproquement. . . . .

55. *Corollaire.* — Deux parallèles sont partout également éloignées l'une de l'autre. . . . .

Des lignes proportionnelles et des triangles semblables.

56. *Théorème.* — Si deux droites quelconques sont coupées par un nombre quelconque de parallèles menées par des points pris à des distances égales sur la première, les parties de la seconde seront aussi égales entre elles. .

57. *Corollaire.* — Un nombre quelconque de parties de la première droite est à un pareil nombre de parties de la seconde, comme la première droite entière est à la seconde entière. . . . .

58. *Théorème.* — Trois parallèles coupent toujours deux droites quelconques en parties proportionnelles. .

Note sur les rapports incommensurables. . . . . . .

59. 1er *corollaire.* — Si l'on mène dans un triangle une droite parallèle à l'un des côtés, les deux autres côtés seront coupés en parties proportionnelles par cette droite.

60. 2e *corollaire.* — Réciproquement, lorsqu'une droite coupe deux côtés d'un triangle en parties proportionnelles, elle est parallèle au troisième . . . .

61. 3e *corollaire.* — La droite qui divise en deux parties égales l'un des angles d'un triangle quelconque partage le côté opposé en deux segments proportionnels aux côtés adjacents. . . . .

62. *Problème.* — Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données. . . . .

63. Deux triangles sont *semblables* lorsque les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre, et que les côtés qui, dans l'un et dans l'autre, sont opposés à des angles égaux, et que, pour cette raison l'on nomme *côtés homologues,* sont proportionnels; l'une de ces conditions entraîne toujours l'autre. . . . .

Pages.

64. *Théorème.* — Lorsque deux triangles ont leurs angles égaux chacun à chacun, leurs côtés homologues sont proportionnels, et ces triangles sont, par conséquent, semblables. 38

65. *Corollaire.*—Deux triangles sont semblables : 1° lorsqu'ils ont seulement deux angles égaux chacun à chacun; 2° lorsque leurs côtés sont respectivement parallèles; 3° lorsque leurs côtés sont respectivement perpendiculaires. *Ib.*

66. *Théorème.* — Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle égal chacun à chacun compris entre des côtés proportionnels. 40

67. *Théorème.* — Deux triangles qui ont les côtés proportionnels chacun à chacun sont semblables. . . . . *Ib.*

68. *Problème.* — Construire sur une droite donnée un triangle semblable à un triangle donné. . . . . *Ib.*

69. *Théorème.* — Tant de lignes qu'on voudra, menées par un même point et rencontrées par deux parallèles, sont coupées par ces parallèles en parties proportionnelles, et les coupent aussi en parties proportionnelles. 42

70. *Problème.* — Diviser une droite donnée de la même manière qu'une autre est divisée. 43

71. *Remarque.* — Autre solution de la même question. 44

72. 1er *corollaire.* — Division d'une droite en parties égales. 45

73. 2e *corollaire.* — Construction des échelles. . . . 46

74. *Théorème.* — Si de l'angle droit d'un triangle rectangle on abaisse une perpendiculaire sur le côté opposé, qu'on nomme *hypoténuse* : 1° cette perpendiculaire partagera le triangle en deux autres qui lui seront semblables, et qui le seront par conséquent entre eux; 2° elle divisera l'hypoténuse en deux parties ou *segments* tels, que chaque côté de l'angle droit sera moyen proportionnel entre le segment qui lui est adjacent et l'hypoténuse entière; 3° la perpendiculaire sera moyenne proportionnelle entre les deux segments de l'hypoténuse. . . . 48

75. *Corollaire.* — La seconde puissance du nombre

Page

qui exprime la longueur de l'hypoténuse est égale à la somme des secondes puissances des nombres qui expriment les longueurs des deux autres côtés. 4

76. *Théorème*. — Les trois côtés d'un triangle quelconque étant rapportés à une mesure commune, et exprimés par conséquent en nombres, si de l'extrémité de l'un quelconque de ces côtés on abaisse une perpendiculaire sur l'un des deux autres, la seconde puissance du premier sera égale à la somme des secondes puissances des derniers, moins deux fois le produit du côté sur lequel tombe la perpendiculaire par la distance de cette perpendiculaire à l'angle opposé au premier côté, si cet angle est aigu, et plus deux fois le même produit, si cet angle est obtus. . . . . *Ib*

77. *Corollaire*. — Un triangle est acutangle, rectangle ou obtusangle, selon que la seconde puissance du plus grand de ses côtés est moindre que la somme des secondes puissances des deux autres côtés, l'égale ou la surpasse. . 5

Des polygones. 5

78. Les surfaces planes terminées par un assemblage quelconque de lignes droites se nomment *polygones*; — Le plus simple de tous est le triangle; les polygones de quatre côtés se nomment en général *quadrilatères*, de cinq *pentagones*, de six *hexagones*, de sept *eptagones*, de huit *octogones*, de neuf *ennéagones*, de dix *décagones*, de douze *dodécagones*, de quinze *pentédécagones*; — Les angles dont l'ouverture est en dedans du polygone sont des angles *saillants*, ceux dont l'ouverture est en dehors se nomment angles *rentrants*; —Les lignes tirées des angles du polygone, qui ne sont pas adjacents au même côté, se nomment *diagonales*. . . . . *Il*

79. Le polygone de quatre côtés, dont les côtés opposés sont parallèles, est un *parallélogramme*; — 1° Chaque diagonale partage le parallélogramme en deux triangles égaux; — 2° Les côtés opposés d'un parallélogramme sont respectivement égaux; — 3° Si les côtés opposés d'une

Pages.

figure de quatre côtés sont égaux, ou bien si deux côtés opposés sont égaux et parallèles, cette figure est un parallélogramme. 53

80. *Théorème*. — Les deux diagonales d'un parallélogramme se coupent mutuellement en deux parties égales. *Ib.*

81. *Théorème*. — En joignant l'un des angles d'un polygone à tous les autres, on partage ce polygone en un nombre de triangles égal à celui de ses côtés, diminué de deux unités. . . . . *Ib.*

82. *Corollaire*. — La somme de tous les angles intérieurs d'un polygone vaut autant de fois deux droits qu'il a de côtés moins deux. 54

83. *Théorème*. — Si l'on prolonge dans le même sens tous les côtés d'un polygone qui n'a point d'angles rentrants, la somme des angles extérieurs est égale à quatre droits, quel que soit d'ailleurs le nombre des côtés du polygone. . . . . *Ib.*

84. *Remarque*. — Deux polygones sont égaux lorsqu'ils sont composés d'un même nombre de triangles égaux chacun à chacun et semblablement disposés. . . . 55

85. *Théorème*. — Lorsqu'on connaît tous les côtés d'un polygone, à l'exception d'un seul, et qu'on connaît aussi les angles compris entre les côtés donnés, le polygone est déterminé et peut être construit. . . . . *Ib.*

86. *Remarque*. — Pour déterminer un polygone d'un nombre N de côtés, il faut $2N - 3$ choses données, parmi lesquelles les angles ne doivent compter que pour $N - 1$ données 56

87. On nomme *polygones semblables* ceux dont les angles sont égaux, et dont les côtés homologues sont proportionnels. . . . . *Ib.*

88. *Théorème*. — Deux polygones composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, et semblablement disposés, ont leurs angles égaux, chacun à chacun, leurs côtés homologues proportionnels, et sont par conséquent semblables . . . . *Ib*

89. *Théorème*. — Lorsque deux polygones sont sem-

Pages.

blables, ils sont composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, et semblablement disposés. 57

90. *Problème.* — Construire sur une ligne donnée un polygone semblable à un polygone donné. 58

91. *Remarque.* — Autre manière de partager des polygones en triangles. 59

Note sur l'art de lever des plans. . . . . *Ib.*

92. *Théorème.* — Si l'on tire dans deux polygones semblables deux droites qui soient semblablement placées dans l'un et dans l'autre, elles seront proportionnelles aux côtés homologues des polygones 60

93. *Théorème.* — Les contours de deux polygones semblables sont entre eux comme les côtés homologues de ces polygones. 61

De la ligne droite et du cercle. . . . . *Ib.*

94. Une droite et un cercle ne peuvent se couper en plus de deux points; — Toute droite qui coupe la circonférence du cercle et qui est prolongée au dehors, se nomme *sécante;* — La partie de cette droite comprise dans le cercle se nomme *corde*. . . . . *Ib.*

95. La corde qui passe par les extrémités d'un arc, ou qui le *sous-tend*, est dite sa *corde;* — La même corde appartient à deux arcs, qui, réunis, forment la circonférence entière. . . . . *Ib.*

96. Lorsqu'une corde passe par le centre du cercle, on lui donne le nom de *diamètre;* — Tous les diamètres d'un cercle sont égaux entre eux; — Le diamètre est la plus grande des droites qu'on peut tirer dans la circonférence du cercle. . . . . *Ib.*

97. Le diamètre partage la circonférence en deux parties égales; — Deux cercles décrits d'un même rayon sont égaux 62

98. *Théorème.* — Si l'on porte un arc quelconque de cercle sur un autre arc du même cercle ou d'un cercle décrit du même rayon que le premier, de manière que deux points quelconques de l'un des arcs tombent sur

Pages.

l'autre, et que les convexités soient tournées du même côté, le plus petit de ces arcs se confondra dans toute son étendue avec le plus grand. 62

Note sur cette propriété du cercle, qui lui est commune avec la ligne droite, et qui prouve la similitude de toutes ses parties ou l'uniformité de sa courbure. . . . . *Ib.*

99. *Corollaire.* — Dans un même cercle ou dans deux cercles décrits du même rayon, les arcs dont les cordes sont égales, sont égaux lorsqu'ils sont de même espèce, c'est-à-dire tous moindres que la demi-circonférence, ou tous plus grands; et réciproquement, quand les arcs sont égaux, les cordes sont égales. 63

100. *Théorème.* — Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, le plus grand arc a la plus grande corde, et réciproquement, pourvu toutefois que les arcs que l'on compare soient moindres que la demi-circonférence. . . *Ib.*

101. *Problème.* — Deux arcs du même cercle ou de cercles égaux étant donnés, trouver le rapport de leurs longueurs 64

102. *Remarque.* — La droite qui n'a qu'un point de commun avec le cercle, ou qui ne fait que le toucher, se nomme *tangente*. 65

103. *Théorème.* — La perpendiculaire menée par un point de la circonférence du cercle sur le rayon qui passe par ce point est tangente au cercle; et réciproquement, la tangente à un point quelconque de la circonférence est perpendiculaire à l'extrémité du rayon mené par ce point.. . . . . *Ib.*

104. *Corollaire.* — On mène une tangente à un point donné de la circonférence du cercle en élevant une perpendiculaire à l'extrémité du rayon qui passe par ce point 66

105. *Théorème.* — Toute droite élevée perpendiculairement sur le milieu d'une corde passe par le centre du cercle et par le milieu de l'arc sous-tendu par cette corde. *Ib.*

106. 1er *corollaire.* — Le milieu d'une corde, le centre du cercle et le milieu de l'arc sous-tendu par la corde, étant en ligne droite, dès qu'une droite passe par deux de ces

Pages.

points, elle passe nécessairement par le troisième; — Toute perpendiculaire abaissée du centre ou du milieu de l'arc, sur la corde, tombera sur le milieu de cette droite. 66

107. 2[e] *corollaire.* — Pour diviser un arc en deux parties égales, il suffit d'élever une perpendiculaire sur le milieu de la corde qui sous-tend cet arc. 67

108. *Théorème.* — Les arcs interceptés dans un même cercle entre deux cordes parallèles, ou entre une tangente et une corde parallèles, sont égaux. . . . . *Ib.*

109. *Théorème.* — Si des sommets de deux angles on décrit deux arcs de cercle du même rayon, le rapport des arcs compris entre les côtés de chaque angle sera le même que celui de ces angles. . . . . *Ib.*

110. 1[er] *corollaire.*—Le rapport des arcs étant le même que celui des angles, il s'ensuit que la mesure d'un angle est l'arc de cercle compris entre ses côtés et décrit de son sommet comme centre 69

111. 2[e] *corollaire.* — Les droites qui divisent un arc en plusieurs parties égales divisent aussi dans un même nombre de parties égales l'angle que mesure cet arc. . . . 70

112. *Théorème.* — Lorsqu'un angle à son sommet placé à la circonférence d'un cercle il a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés. 71

113. 1[er] *corollaire.* — L'angle formé par une corde et par le prolongement d'un autre corde a pour mesure la moitié de la somme des arcs sous-tendus par ces cordes en dehors de l'angle qu'elles forment. 72

114. 2[e] *corollaire.* — 1° Tous les angles qui ont leur sommet placé à la circonférence, et s'appuient sur le même arc, sont égaux; — 2° L'angle dont le sommet est sur la circonférence, et dont les côtés passent par les extrémités d'un diamètre, est droit. 73

115. *Théorème.* — L'angle dont le sommet est placé dans le cercle, entre le centre et la circonférence, a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés, plus la moitié de l'arc compris entre leurs prolongements. . . . *Ib.*

116. *Théorème.* — L'angle dont le sommet est placé

Pages.

hors du cercle a pour mesure la moitié de la différence des arcs compris entre ses côtés, et dont l'un tourne sa concavité vers le sommet, et l'autre sa convexité. 74

117. *Problème.* — Élever une perpendiculaire à l'extrémité d'une ligne droite sans la prolonger. . . . . . *Ib.*

118. *Problème.* — D'un point donné hors d'un cercle mener une tangente à ce cercle. 75

119. *Problème.* — Par trois points qui ne sont pas en ligne droite faire passer une circonférence de cercle. . *Ib.*

120. 1er *corollaire.* — Par trois points donnés on ne peut faire passer qu'une seule circonférence de cercle; — La question devient insoluble quand les trois points sont en ligne droite. . . . . *Ib.*

121. 2e *corollaire.* — Deux cercles ne peuvent avoir trois points communs sans se confondre, et ne sauraient, par conséquent, se rencontrer en plus de deux points. . 76

122. *Théorème.* — Deux cercles qui passent par un même point de la droite qui joint leurs centres n'ont que ce point de commun, dans lequel ils se touchent, par conséquent; et réciproquement, si deux cercles se touchent, leurs centres et le point de contact sont en ligne droite. . . . . *Ib.*

123. *Remarque.* — Conditions qui doivent avoir lieu pour que deux cercles se coupent; — La perpendiculaire élevée par le point de contact de deux cercles, sur la ligne qui joint leurs centres, touche en même temps ces deux cercles; — Entre un cercle et sa tangente, on ne peut mener aucune droite, mais on peut y faire passer une infinité de cercles différents. 77

Note sur l'angle de contingence. 78

124. *Problème.* — Décrire un cercle qui touche en un point donné une droite donnée de position, et qui passe par un second point donné. . . . . *Ib.*

125. *Problème.* — Décrire un cercle qui touche en un point donné un autre cercle donné, et qui passe par un second point donné. 79

126. *Problème.*—Décrire sur une ligne donnée un cercle

Pages.

tel, que tous les angles ayant leur sommet à sa circonférence, et s'appuyant sur cette droite, soient égaux à un angle donné, ou décrire un *segment* de cercle *capable* d'un angle donné. 79

127. *Théorème*. — Deux sécantes qui partent d'un même point pris hors du cercle, étant prolongées jusqu'à la partie de la circonférence la plus éloignée de ce point, sont réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures. 80

128. *Remarque*. — La tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante et sa partie extérieure; — Démonstration de cette proposition à priori. . . . . *Ib*.

129. *Théorème*. — Deux cordes qui se rencontrent dans un cercle se coupent en parties réciproquement proportionnelles. 81

N. B. — Énoncé commun au théorème ci-dessus et à celui du n° **127** : Lorsque deux droites qui se coupent rencontrent en même temps une circonférence de cercle, chacune en deux points, les distances de leur point d'intersection à chacun de ceux où elles rencontrent cette circonférence sont réciproquement proportionnelles. . 82

130. *Corollaire*. — La perpendiculaire élevée sur un diamètre, et terminée à la circonférence, est moyenne proportionnelle entre les deux segments du diamètre. . . *Ib*.

Comment on trouve une moyenne proportionnelle entre deux lignes données. . . . . *Ib*.

131. *Remarque*. — Démonstration de la proposition précédente tirée du triangle rectangle; — La corde menée par l'extrémité du diamètre est moyenne proportionnelle entre le diamètre et le segment formé par la perpendiculaire abaissée de l'autre extrémité de cette corde; — Autre manière de trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données. . . . . *Ib*.

132. *Problème*. — Partager une ligne en moyenne et extrême raison, c'est-à-dire de manière que la plus grande des deux parties soit moyenne proportionnelle entre la ligne entière et l'autre partie. 83

Pages.

133. *Problème.* — Décrire un cercle qui passe par deux points donnés, et qui touche une ligne droite indéfinie donnée de position. 84

Note sur les diverses solutions dont ce problème et le précédent sont susceptibles. . . . . *Ib.*

134. *Théorème.* — Lorsque des cordes partent de la même extrémité d'un diamètre, les secondes puissances de leurs longueurs sont proportionnelles aux segments compris sur ce diamètre, entre l'extrémité commune à toutes les cordes et le pied de la perpendiculaire abaissée de l'autre extrémité 85

Des polygones inscrits et circonscrits au cercle. . . . . *Ib.*

135. *Remarques.* — On peut faire passer un cercle par les sommets des angles d'un triangle quelconque; dans ce cas, le triangle est *inscrit* au cercle, et le cercle est *circonscrit* au triangle; — Autre démonstration des propositions des n^{os} 36, 37 et 81. . . . . *Ib.*

136. *Problème.* — Inscrire un cercle dans un triangle donné, c'est-à-dire décrire dans l'intérieur de ce triangle un cercle qui ne fasse qu'en toucher les trois côtés. . . . 86

137. *Remarque.* — On ne saurait généralement inscrire dans un cercle tous les polygones de quatre ou d'un plus grand nombre de côtés. 87

Note sur le caractère des quadrilatères inscrits au cercle. . . . . *Ib.*

138. *Théorème.* — Tout polygone d'un nombre quelconque de côtés, lorsqu'il est *régulier*, c'est-à-dire lorsqu'il a tous ses angles égaux et tous ses côtés égaux, peut être inscrit et circonscrit au cercle. . . . . *Ib.*

139. Les angles formés par les rayons menés du centre du polygone à chacun de ses angles se nomment *angles au centre*, et leur somme étant équivalente à quatre droits, chacun d'eux est égal à cette somme divisée par le nombre des angles ou des côtés du polygone proposé. . 89

140. *Théorème.* — Les polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables, et leurs contours

Pages.

sont entre eux comme les rayons des cercles auxquels ils sont inscrits ou circonscrits. 89

141. *Problème*. — Un polygone d'un nombre quelconque de côtés étant inscrit au cercle, inscrire dans le même cercle un second polygone d'un nombre de côtés double de celui des côtés du premier, et trouver la valeur de l'un des côtés du second. 90

142. Le quadrilatère dont les angles et les côtés sont égaux se nomme *carré;* chacun de ses angles est droit. . 91

143. *Remarques*. —. Le carré est un parallélogramme; le parallélogramme dont les côtés sont égaux et les angles inégaux se nomme *rhombe* ou *losange;* celui dont les quatre angles sont droits et les côtés inégaux se nomme *rectangle;* tout rectangle peut s'inscrire dans un cercle. . *Ib.*

144. *Problème*. — Construire un carré sur une ligne donnée. 92

145. *Problème*. — Inscrire dans un cercle les polygones de 4, 8, 16, 32, 64, ..., côtés . . . . *Ib.*

Note sur la manière d'obtenir $\sqrt{2}$ géométriquement. . 93

146. *Problème*. — Inscrire dans un cercle les polygones de 3, 6, 12, 24, 48, ..., côtés. 94

147. *Problème*. — Inscrire dans un cercle les polygones de 5, 10, 20, 40, ..., côtés 95

148. *Remarque*. — La différence entre les arcs soustendus par les côtés de l'hexagone et du décagone donne la quinzième partie de la circonférence; la corde de cet arc est le côté du pentédécagone, et, par sa *bissection*, on obtiendra les polygones de 30, 60, ..., côtés 96

Note sur la division du cercle en $2^n + 1$ parties. . . . 97

149. *Problème*. — Un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés étant inscrit dans un cercle, circonscrire au même cercle un polygone régulier du même nombre de côtés; et réciproquement, le polygone circonscrit étant donné, construire le polygone inscrit. . . . *Ib.*

150. *Corollaire*. — Expression du côté du polygone régulier circonscrit par le moyen de celui du polygone inscrit correspondant. 99

Pages.

151. *Remarque.* — La différence entre le contour du polygone inscrit et celui du polygone circonscrit correspondant diminue à mesure qu'on augmente le nombre de leurs côtés, et l'on peut toujours trouver deux polygones, l'un inscrit, l'autre circonscrit, tels, que la différence de leurs contours soit moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite que soit cette grandeur. 99

152. *Corollaire.* — La circonférence du cercle est moindre que le contour du polygone circonscrit, et plus grande que celui du polygone inscrit; on peut toujours trouver un polygone, soit inscrit, soit circonscrit, tel, que la différence entre son contour et la circonférence du cercle soit moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite que soit cette grandeur. 101

153. *Théorème.* — Si deux grandeurs invariables, A et B, sont telles, qu'on puisse prouver que leur différence A — B est moindre qu'une troisième grandeur δ, quelque petite que puisse être cette dernière, ces deux grandeurs sont égales entre elles. . . . . *Ib.*

154. *Théorème.* — Les circonférences des cercles sont entre elles comme leurs rayons ou leurs diamètres. . . . 102

Note. — Autre démonstration du même théorème. . . 103

155. *Corollaire.* — Moyen de calculer la longueur d'une circonférence dont on connaît le rayon.. . . . . . *Ib.*

156. *Problème.* — Trouver le rapport approché de la circonférence au diamètre. 104

Note. — Rapport de la circonférence au diamètre, consigné dans un ouvrage persan. 107

157. *Remarque.* — Solution abrégée du problème précédent. 108

SECTION II.

De l'aire des polygones et de celle du cercle.

158. La portion d'étendue renfermée entre les lignes qui terminent une figure se nomme la *surface* ou l'*aire* de cette figure. 110

Pages.

Note sur l'emploi des mots *surface* et *aire*. 110

159. Deux figures de formes différentes, mais d'une étendue égale, ou renfermant des aires égales, sont dites *équivalentes*. . . . . *Ib.*

160. Dans les triangles et dans les parallélogrammes, on prend arbitrairement pour *base* un des côtés, et l'on appelle *hauteur* la perpendiculaire abaissée de l'angle opposé à ce côté dans le triangle, ou d'un point quelconque du côté opposé dans le parallélogramme. . . . . *Ib.*

161. *Théorème.* — Deux parallélogrammes de même base et de même hauteur sont équivalents. 111

162. *Théorème.* — Un triangle quelconque est la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur. 112

163. *Corollaire.* — Deux triangles qui ont même base et même hauteur sont équivalents. . . . . *Ib.*

164. *Problème.* — Transformer un polygone en un autre qui ait un côté de moins, et qui soit équivalent. . *Ib.*

165. *Corollaire.* — On peut changer ainsi un polygone quelconque en un triangle équivalent. 113

166. *Théorème.* — Deux rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs. . . . . *Ib.*

167. *Théorème.* — Deux rectangles quelconques sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs. 115

Note sur la considération des produits des aires. . . . 116

168. *Remarque.* — Sur la mesure des aires en général, et sur le sens de l'expression, *l'aire d'un rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur*. . . . . . . *Ib.*

169. 1er *corollaire.* — L'aire d'un carré se mesure par la seconde puissance de son côté. 117

170. 2e *corollaire.* — L'aire d'un parallélogramme se mesure par le produit de sa base par sa hauteur; — Deux parallélogrammes quelconques sont dans le rapport des produits de leurs bases par leurs hauteurs 118

171. 3e *corollaire.* — L'aire d'un triangle est mesurée par la moitié du produit de sa base par sa hauteur; — Les

Pages.

triangles quelconques sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs. 118

172. *Problème.* — Transformer un parallélogramme ou un triangle en un carré. . . . . *Ib.*

173. *Corollaire.* — Transformer un polygone quelconque en un carré équivalent. 119

174. *Remarque.* — On évalue l'aire d'un polygone quelconque en prenant la somme de celles des triangles qui le composent. . . . . *Ib.*

175. *Théorème.*— L'aire d'un quadrilatère dans lequel deux côtés sont parallèles, et qu'on nomme *trapèze,* se mesure par le produit de la demi-somme des deux côtés parallèles, multipliée par la hauteur prise entre ces côtés; *Ib.*
—L'aire du trapèze se mesure aussi par le produit de sa hauteur, par une ligne menée à égale distance des deux bases parallèles. 120

176. *Théorème.* — Les aires des polygones semblables sont entre elles comme les carrés des côtés homologues de ces polygones . . . . *Ib.*

177. *Théorème.* — Les aires de deux triangles qui ont un angle commun sont dans le rapport des produits des côtés qui comprennent cet angle. 122

178. *Théorème.* — Le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équivalent à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés de ce triangle . . . . *Ib.*

179. 1[er] *corollaire.*— Les carrés construits sur les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle et sur l'hypoténuse sont entre eux comme les segments adjacents et l'hypoténuse entière. 123

180. 2[e] *corollaire.* — Tout polygone construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équivalent à la somme des polygones semblables construits sur les deux autres côtés.. 124

181. *Problème.* — Construire un polygone semblable à un autre, et dont l'aire soit dans un rapport donné

Pages.

avec celle du premier, ou soit équivalente à un carré donné. 124

182. *Théorème*. — L'aire d'un polygone régulier a pour mesure la moitié du produit de son contour par le rayon du cercle inscrit ; — Ce contour se nomme *périmètre,* et le rayon du cercle inscrit se nomme *apothème*. 125

183. *Corollaire*. — Les aires des polygones réguliers sont entre elles comme les carrés des rayons des cercles dans lesquels ils sont inscrits ou auxquels ils sont circonscrits. 126

184. *Remarque*. — Il est toujours possible de trouver deux polygones du même nombre de côtés, l'un inscrit, l'autre circonscrit, tels, que la différence de leurs aires soit moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite que soit cette grandeur. . . . . *Ib.*

185. *Corollaire*. — On peut toujours assigner un polygone régulier, soit inscrit, soit circonscrit, dont l'aire diffère aussi peu qu'on voudra de celle d'un cercle donné. 127

186. *Théorème*. — Si trois grandeurs, A, B, X, sont telles, que la première A, que l'on suppose variable, mais néanmoins surpassant toujours les deux autres, B, X, qui ne changent point, puisse approcher de toutes deux en même temps, aussi près qu'on voudra, on aura nécessairement B = X. . . . . *Ib.*

187. *Théorème*. — L'aire d'un cercle a pour mesure la moitié du produit de la circonférence par le rayon. . . 128

Note. — Autre preuve de la même proposition.. . . . *Ib.*

188. *Corollaire*. — Les aires des cercles sont entre elles comme les carrés de leurs rayons ou de leurs diamètres; — L'aire d'un cercle est égale au carré du rayon multiplié par le rapport de la circonférence au diamètre. . . 129

189. *Théorème*. — L'aire d'un *secteur de cercle* a pour mesure la moitié du produit de l'arc par le rayon. . . . 130

190. *Remarque*. — L'aire du *segment* s'obtient en retranchant de l'aire du secteur celle du triangle correspondant. . . . . *Ib.*

N. B. — Ce que c'est que le *segment* et sa *flèche*. . . 13[illegible]

DEUXIÈME PARTIE.

SECTION PREMIÈRE.

Des plans et des corps terminés par des surfaces planes.

Pages.

Des plans et des lignes droites 132

191. Une ligne droite qui a deux de ses points dans un plan s'y trouve tout entière. . . . . *Ib.*

192. L'intersection de deux plans est une ligne droite. *Ib.*

193. Il faut trois points pour déterminer un plan ; ou deux plans ayant trois points communs qui ne sont pas en ligne droite coïncident parfaitement.. . . . . *Ib.*

194. Deux lignes qui se coupent sont dans un même plan ; — Tout triangle est dans un seul plan, et quatre points qui ne sont pas dans un même plan forment un *quadrilatère gauche*.. 133

195. Dans l'espace, deux droites peuvent être perpendiculaires à une troisième, sans être parallèles entre elles. *Ib.*

196. *Théorème.* — Une droite élevée hors d'un plan, perpendiculairement à deux autres menées par son pied dans ce plan, est perpendiculaire à toutes celles qu'on pourrait mener par ce point dans le même plan. 134

197. *Remarque.* — La ligne menée d'après le théorème précédent est perpendiculaire au plan sur lequel elle est élevée 135

198. *Théorème.* — Si trois droites sont perpendiculaires à une même droite par un même point, elles sont toutes les trois dans un même plan perpendiculaire à cette dernière. . . . . *Ib.*

199. *Théorème.* — Par un point pris, soit hors d'un plan, soit sur ce plan, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à ce plan, et par le même point d'une droite il ne peut passer qu'un seul plan perpendiculaire à cette droite. . . . . *Ib.*

200. *Théorème.* — Les obliques qui s'écartent également de la perpendiculaire à un plan sont égales ; celles qui s'écartent le plus sont les plus longues, et la perpendi-

Pages.

culaire est la plus courte de toutes les droites que l'on peut mener d'un point donné à un plan. 136

201. *Remarques*. — Chaque point de la perpendiculaire à un plan peut être employé à décrire, dans ce plan, des cercles dont le centre soit à son pied; — La perpendiculaire, étant la plus courte ligne qu'on puisse mener d'un point pris hors d'un plan sur ce plan, est la mesure naturelle de leur distance.. 137

202. *Théorème*. — Si par un point d'une droite oblique à un plan on abaisse sur ce plan une perpendiculaire, et que l'on joigne les pieds de l'oblique et de la perpendiculaire par une droite, la perpendiculaire à cette dernière sera aussi perpendiculaire sur l'oblique.. . . . . *Ib.*

203. *Théorème*. — Une droite située hors d'un plan, mais parallèle à une ligne quelconque menée dans ce plan, ne le rencontre point, quelque prolongée qu'on la suppose, et est en même temps parallèle à toute droite menée dans le plan parallèlement à la première. . . . . *Ib.*

204. *Corollaire*. — Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles. 138

205. *Théorème*. — Les angles qui ont les côtés parallèles et l'ouverture tournée dans le même sens sont égaux, quoique situés dans des plans différents. . . . . *Ib.*

206. *Théorème*. — Si par un point quelconque de la commune section de deux plans on mène dans chacun de ces plans des droites respectivement perpendiculaires à cette commune section, et que l'angle qu'elles forment entre elles soit égal à celui que forment deux autres droites menées de la même manière dans deux autres plans, on pourra faire coïncider les deux premiers plans avec les deux derniers.. 139

207. 1[er] *corollaire*. — L'espace indéfini compris entre deux plans qui se coupent se nomme *angle dièdre*, ou *angle à deux faces;* il mesure leur *inclinaison;* — L'angle dièdre a pour mesure l'angle plan formé par deux droites menées dans chacune de ses faces, perpendiculairement à leur commune section et par un même point de cette

Pages.

droite; — Les angles dièdres jouissent des mêmes propriétés que les angles plans qui les mesurent. 140

Note. — Raison de la dénomination d'*angle dièdre* . . *Ib.*

208. 2e *corollaire.* — Un plan mené par une ligne perpendiculaire à un autre plan est perpendiculaire sur ce dernier; — Par une droite prise dans un plan, on ne peut élever qu'un seul plan perpendiculaire au premier.. 141

209. *Théorème.* — Si par un point quelconque de la commune section de deux plans qui se rencontrent à angle droit, on élève perpendiculairement au premier une droite, elle sera comprise dans le second. 142

210. *Corollaire.* — L'intersection de deux plans perpendiculaires à un troisième est perpendiculaire à ce dernier . . . . *Ib.*

211. *Théorème.* — La droite menée dans un plan, perpendiculairement à la commune section de celui-ci avec un autre qui le rencontre à angle droit, est perpendiculaire sur cet autre.. . . . . *Ib.*

212. *Théorème.* — Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles entre elles; et réciproquement, si une droite est perpendiculaire à un plan, toute autre droite parallèle à celle-ci sera aussi perpendiculaire au même plan. 143

213. *Théorème.* — Deux plans perpendiculaires à une même droite ne sauraient se rencontrer. . . . . *Ib.*

214. Deux plans perpendiculaires à une même droite, ne se rencontrant point, sont *parallèles* entre eux. . . . 144

215. *Théorème.* — Lorsque deux plans parallèles sont coupés par un troisième, les intersections sont parallèles entre elles. . . . . *Ib.*

216. *Corollaire.* — Deux plans parallèles ont leurs perpendiculaires communes; — La distance de deux plans parallèles est partout la même. . . . . *Ib.*

217. *Théorème.* — Si deux droites qui se coupent sont parallèles à deux autres droites qui se coupent, le plan déterminé par les deux premières sera parallèle à celui que déterminent les deux autres. 145

Pages.

218. *Corollaire.* — Par deux droites qui, ne se coupant point et n'étant point parallèles entre elles, ne sauraient être comprises dans un même plan, on peut toujours faire passer deux plans parallèles, dont la plus courte distance donne celle des deux droites proposées. 145

219. *Remarque.* — La plus courte distance des droites de l'article précédent a lieu sur une droite qui est perpendiculaire à toutes deux en même temps. . . . . *Ib.*

220. *Théorème.* — Deux droites comprises entre deux plans parallèles sont toujours coupées en parties proportionnelles par un troisième plan parallèle aux deux premiers. 146

221. Lorsque plusieurs plans qui passent par un même point se rencontrent deux à deux, l'espace qu'ils comprennent entre eux, indéfini dans le sens opposé au point où ils se rencontrent, se nomme *angle polyèdre,* ou angle à plusieurs faces; — L'angle à trois faces se nomme *angle trièdre,* etc.; — Le point de rencontre de toutes les faces d'un angle polyèdre en est le *sommet;* — Les communes sections des faces sont les *arêtes;* — Il y a dans l'angle trièdre six choses à considérer, savoir, trois angles plans et trois angles dièdres. . . . . *Ib.*

222. *Théorème.* — La somme de deux quelconques des angles plans qui composent un angle trièdre est toujours plus grande que le troisième. 147

223. *Théorème.* — Si deux angles trièdres sont formés des mêmes angles plans, les angles dièdres compris entre les angles plans égaux seront égaux. 148

224. *Théorème.* — Deux angles trièdres formés par trois angles plans égaux, et semblablement disposés entre eux, sont égaux dans toutes leurs parties. 150

225. *Remarque.* — Deux angles trièdres composés des mêmes angles plans assemblés différemment, ou deux angles trièdres *inverses* l'un de l'autre, ne peuvent coïncider, mais renferment le même espace. . . . . . . *Ib.*

Note sur les angles trièdres inverses. 151

226. *Théorème.* — La somme des angles plans qui

Pages.

composent un angle polyèdre convexe, c'est-à-dire dont toutes les arêtes sont saillantes ou extérieures, mais d'ailleurs quelconque, est toujours moindre que quatre droits. 152

Des corps terminés par des plans. 153

227. Les corps terminés par des plans se nomment *polyèdres;* — On ne peut fermer de toutes parts un espace par un nombre de plans moindre que quatre, et le corps qui en résulte se nomme *tétraèdre;* — Tout corps dont une des faces est un polygone quelconque, et dont toutes les autres sont des triangles ayant leur sommet au même point, se nomme *pyramide;* le point où se réunissent ces dernières est le *sommet*, et la face opposée est la *base*. . . . . *Ib.*

228. *Théorème.* — Si deux tétraèdres ont chacun un angle trièdre composé de triangles égaux et semblablement disposés, ces tétraèdres sont égaux, et ils le seront encore si deux faces de l'un sont égales à deux faces de l'autre, assemblées de la même manière, et forment entre elles le même angle dièdre que celles-ci. . . . . *Ib.*

229. Les *polyèdres semblables* sont ceux dont les faces sont en même nombre semblables, semblablement disposées, et également inclinées les unes à l'égard des autres. 154

230. *Théorème.* — Lorsque les triangles qui forment deux angles trièdres homologues de deux tétraèdres sont semblables chacun à chacun et semblablement disposés, ces tétraèdres sont semblables; et ils le sont encore si deux faces de l'un font entre elles le même angle que deux faces de l'autre, sont en outre semblables à celles-ci et assemblées par des côtés homologues. . . . . *Ib.*

231. *Théorème.* — Deux pyramides quelconques sont semblables lorsque leurs faces sont semblables et semblablement disposées. 156

232. 1^er^ *corollaire.* — En coupant une pyramide par

Pages.

un plan parallèle à sa base, on en retranche une pyramide qui lui est semblable. 156

233. 2e *corollaire.* — Les arêtes homologues des pyramides semblables sont proportionnelles entre elles et aux perpendiculaires abaissées des sommets sur les bases. 157

234. *Remarque.* — On peut trouver, par ce qui précède, la hauteur d'une pyramide, quand on connaît les dimensions d'un *tronc* à bases parallèles. 158

235. *Théorème.* — Les bases des pyramides semblables sont entre elles comme les carrés de deux arêtes homologues quelconques, et comme les carrés des perpendiculaires abaissées du sommet sur leur plan. . . . . *Ib.*

236. *Corollaire.* — Les sections faites à la même distance des sommets dans deux pyramides quelconques sont dans un rapport constant, quelles que soient d'ailleurs ces distances et les figures des bases. 159

237. Les polyèdres qui ont deux faces opposées égales et parallèles, et dont toutes les autres sont des parallélogrammes, se nomment *prismes;* — Les polygones opposés sont les *bases* du prisme; — Chaque angle polyèdre d'un prisme n'est composé que de trois angles plans; — Quand ses arêtes sont perpendiculaires sur sa base, c'est un *prisme droit*, les autres sont des *prismes obliques*. . . . *Ib.*

238. Le prisme dont la base est un parallélogramme se nomme *parallélépipède;* ses faces opposées sont égales et parallèles.. 160

239. *Théorème.* — Un polyèdre compris entre six plans parallèles deux à deux est un parallélépipède. . . *Ib.*

240. *Théorème.* — Si deux prismes ont chacun un angle trièdre composé de polygones égaux et semblablement disposés, ces prismes seront égaux. 161

Note sur la similitude des prismes. . . . . *Ib.*

241. *Remarques.* — En joignant par des droites le sommet d'un de leurs angles à tous les autres, et divisant toutes leurs faces en triangles, on peut toujours partager les polyèdres quelconques en pyramides triangulaires; — Deux corps composés d'un même nombre de pyra-

Pages.

mides triangulaires égales et semblablement disposées sont égaux ; — Un polyèdre ayant un nombre N d'angles est déterminé par 3N — 6 données, prises parmi les distances des sommets de ces angles. 161

Note sur le nombre des angles, des faces et des arêtes d'un polyèdre. 162

242. *Théorème.* — Deux polyèdres qui sont composés d'un même nombre de pyramides semblables et semblablement disposées sont semblables. 163

243. *Théorème.* — Lorsque deux polyèdres sont semblables, ils peuvent être partagés en un même nombre de tétraèdres semblables et semblablement disposés. . . . 164

244. *Théorème.* — Les arêtes homologues des polyèdres semblables sont proportionnelles, ainsi que les diagonales des faces homologues et les diagonales intérieures aux polyèdres. 166

245. *Remarque* sur la mesure de l'aire des polyèdres. *Ib.*

246. *Théorème.* — Les aires des polyèdres semblables sont entre elles comme les carrés des arêtes homologues. . 167

De la mesure des volumes. 168

247. L'espace renfermé par la surface d'un polyèdre, ou occupé par ce corps, est généralement désigné sous le nom de *volume*, ou de *capacité*, lorsqu'il s'agit d'un corps creux. . . . . *Ib.*

Note sur les motifs d'exclure le mot *solidité*. . . . . . *Ib.*

248. *Théorème.* — Deux parallélépipèdes construits sur la même base, et terminés supérieurement par le même plan parallèle à leur base, sont équivalents en volume. . . . . *Ib.*

249. *Corollaire.* — Un parallélépipède quelconque peut être transformé en un parallélépipède rectangle ayant une base équivalente à celle du premier, et même *hauteur ;* — La *hauteur* d'un prisme, ou d'un parallélépipède, est la perpendiculaire menée entre les deux bases (pour une pyramide, c'est la perpendiculaire abaissée du sommet sur la face opposée, face qui s'appelle *base*). . . 169

Pages.

250. *Théorème*. — Si l'on forme sur la base d'un prisme triangulaire un parallélogramme, et que l'on élève sur ce parallélogramme, pris pour base, un parallélépipède de même hauteur que le prisme triangulaire, celui-ci sera la moitié de l'autre. 170

Note où l'on démontre l'égalité des volumes des deux prismes triangulaires du numéro précédent, qui, bien que construits sur les mêmes parties, ne peuvent pas coïncider. 171

251. *Corollaire*. — Deux prismes triangulaires de même base et de même hauteur sont équivalents. . . . . *Ib.*

252. *Théorème*. — Si l'on coupe un tétraèdre par des plans parallèles à sa base et équidistants, on pourra former, à chaque tranche, un prisme *extérieur* et un prisme *intérieur*, de manière que la somme des premiers diffère aussi peu qu'on voudra de celle des seconds, et, par conséquent, aussi du tétraèdre. 172

253. *Théorème*. — Deux tétraèdres de même base et de même hauteur sont équivalents. 173

Note. — Autre démonstration de la proposition précédente.. 174

254. *Théorème*. — Un tétraèdre est équivalent au tiers du prisme triangulaire de même base et de même hauteur. . . . . *Ib.*

255. *Théorème*. — Les parallélépipèdes rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs. 175

256. *Théorème*. — Deux parallélépipèdes rectangles sont entre eux comme les produits des arêtes qui forment un même angle trièdre 176

257. *Remarque*. — La mesure du volume d'un parallélépipède rectangle est le produit de ses trois arêtes contiguës, en prenant pour terme de comparaison le parallélépipède dont les trois arêtes contiguës sont égales à la ligne choisie pour unité.. 177

258. 1er *corollaire*. — Lorsque les arêtes sont égales entre elles, le parallélépipède, qui prend le nom de *cube*, a pour mesure la troisième puissance de son arête. . . . 178

Pages.

259. 2ᵉ *corollaire.* — Le volume d'un parallélépipède quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur. 178

260. 3ᵉ *corollaire.* — Le volume d'un prisme quelconque est égal au produit de sa base par sa hauteur; — Deux prismes quelconques sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs. . . . . . *Ib.*

261. 4ᵉ *corollaire.* — Le volume d'un tétraèdre a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur. . . 179

262. 5ᵉ *corollaire.* — Le volume d'une pyramide quelconque a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur; — Deux pyramides quelconques sont entre elles comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs. . . . . *Ib.*

263. *Remarques.* — Le volume d'un tronc de pyramide s'obtient en prenant la différence entre celui de la pyramide entière et celui de la pyramide retranchée; — Le volume d'un polyèdre quelconque peut s'évaluer en décomposant ce polyèdre en pyramides, ou en le ramenant à des *prismes triangulaires tronqués.* 180

264. *Théorème.* — Un prisme triangulaire tronqué est équivalent à trois tétraèdres de même base, ayant leurs sommets respectifs placés à chacun des angles du triangle opposé à cette base. 181

265. *Corollaire.* — Le volume d'un prisme triangulaire tronqué a pour mesure le produit de sa base par le tiers de la somme des trois perpendiculaires abaissées sur cette base, de chacun des angles de la base supérieure. 182

266. *Théorème.* — Deux polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes de leurs arêtes homologues. *Ib.*

Note. — Les volumes de deux tétraèdres qui ont un angle trièdre commun sont entre eux comme les produits des arêtes qui, dans chacun, comprennent cet angle. . . . 183

SECTION II.

Des corps ronds.

Pages.

267. Les corps ronds sont ceux qu'on produit en faisant tourner une figure plane autour d'une ligne droite; — On ne considère, dans les Éléments de Géométrie, que le cône droit, le cylindre droit et la sphère; — Le *cône droit* s'engendre en faisant tourner un triangle rectangle autour de l'un des côtés de l'angle droit, l'hypoténuse décrit la surface conique droite; — Le côté autour duquel tourne le triangle générateur se nomme l'*axe;* — La base du cône est un cercle; — Toute section faite par un plan parallèle à cette base est également un cercle; — Les circonférences de ces cercles sont proportionnelles à leurs distances au sommet; — Leurs aires sont entre elles comme les carrés de ces distances. 184

Note sur le cône oblique. 185

268. *Remarque.* — Lorsqu'on a les dimensions d'un tronc de cône droit, à bases parallèles, on peut, par ce qui précède, trouver la hauteur du cône entier. . . . . . . *Ib.*

269. *Théorème.* — On peut toujours trouver deux *pyramides régulières*, l'une inscrite, l'autre circonscrite à un cône droit, telles, que la différence de leurs aires soit moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite que soit cette grandeur; — L'aire d'une *pyramide régulière*, lorsqu'on n'y comprend point sa base, a pour mesure la moitié du produit du contour de cette base par la perpendiculaire abaissée du sommet sur l'un de ses côtés. . . . 186

270. *Corollaire.* — L'aire du cône est toujours moindre que celle de la pyramide circonscrite, et plus grande que celle de la pyramide inscrite; mais chacune de ces dernières peut approcher de la première aussi près qu'on voudra. . . 187

271. *Théorème.* — L'aire d'un cône droit a pour mesure la moitié du produit de la circonférence du cercle qui lui sert de base par son côté. 188

Note où l'on indique un autre tour de démonstration pour la proposition ci-dessus et pour ses analogues. . . *Ib.*

Pages.

272. *Théorème.* — L'aire d'un tronc de cône droit, à bases parallèles, ou du *cône tronqué*, a pour mesure la moitié du produit de la somme des circonférences de ses deux bases par son côté, ou le produit de ce côté par la circonférence de la section faite à égale distance des bases.

N. B.—En substituant le sommet à la base supérieure, ces mesures conviennent au cône entier 189 190

273. *Théorème.* — On peut toujours trouver deux pyramides, l'une inscrite et l'autre circonscrite à un cône droit, telles, que la différence de leurs volumes soit moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite que soit cette grandeur. . . . . *Ib.*

274. *Corollaire.* — On peut toujours assigner une pyramide inscrite et une pyramide circonscrite qui diffèrent aussi peu qu'on voudra du cône, l'une étant plus petite et l'autre plus grande. 191

275. *Théorème.* — Le volume d'un cône a pour mesure le tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur. . . *Ib.*

Note sur le cône oblique. . . . . *Ib.*

276. *Problème.* — Trouver le volume d'un tronc de cône droit à bases parallèles. 192

277. Un rectangle qui tourne autour de l'un de ses côtés, engendre le corps appelé *cylindre droit;* — Les bases d'un cylindre droit sont des cercles égaux et parallèles, ainsi que toutes les sections parallèles à ces bases; — Le côté autour duquel tourne le rectangle générateur se nomme l'*axe*. . . . . *Ib.*

Note sur le cylindre oblique. . . . . *Ib.*

278. *Théorème.* — On peut inscrire et circonscrire à un cylindre droit deux prismes droits, tels, que la différence de leurs aires soit moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite que soit cette grandeur. 193

279. *Corollaire.* —On peut toujours trouver un prisme, soit inscrit, soit circonscrit, dont l'aire diffère aussi peu qu'on voudra de l'aire du cylindre droit, plus grande que la première et moindre que la seconde. 194

280. *Théorème.* — L'aire de la surface convexe du

Pages.

cylindre droit a pour mesure le produit de la circonférence de sa base par sa hauteur. 194

281. *Théorème.* — On peut toujours former deux prismes, l'un inscrit, l'autre circonscrit au cylindre, tels, que leurs volumes diffèrent aussi peu qu'on voudra. . . 195

282. *Corollaire.* — On peut construire un prisme inscrit et un prisme circonscrit, tels, que leurs volumes diffèrent aussi peu qu'on voudra de celui du cylindre, qui sera toujours plus grand que le premier et moindre que le second. . . . . *Ib.*

283. *Théorème.* — Le volume d'un cylindre droit a pour mesure le produit de l'aire de sa base par sa hauteur. . . . . *Ib.*

Note sur le cylindre oblique. 196

284. Un demi-cercle, en tournant autour de son diamètre, engendre la *sphère,* et la demi-circonférence qui l'enveloppe décrit la surface sphérique; — Le diamètre autour duquel tourne le demi-cercle générateur est l'*axe,* et ses extrémités sont les *pôles;* — La surface sphérique a tous ses points également éloignés du centre du cercle générateur. *Ib.*

285. *Théorème.* — La section de la sphère par un plan quelconque est toujours un cercle. . . . . *Ib.*

286. *Remarque.* — Les cercles dont le plan passe par le centre de la sphère sont de *grands cercles,* les autres sont de *petits cercles;* — Tous les grands cercles sont égaux entre eux. 197

287. *Corollaire.* — Deux grands cercles se coupent toujours en deux parties égales. . . . . *Ib.*

288. Trois cercles se coupant deux à deux sur la surface de la sphère forment un *triangle sphérique;* on ne considère dans les Éléments que celui qui est formé par trois arcs de grands cercles. . . . . *Ib.*

289. *Théorème.* — La somme de deux côtés quelconques d'un triangle sphérique est toujours plus grande que le troisième. *Ib.*

Pages.

290. 1er *corollaire.* — Le plus court chemin pour aller d'un point à un autre sur la surface sphérique est l'arc du grand cercle déterminé par le plan qui passe par ces deux points et par le centre de la sphère. 198

291. 2e *corollaire.* — La somme des trois côtés d'un triangle sphérique est moindre que la circonférence d'un grand cercle. 199

292. *Théorème.* — Si par le centre d'un cercle quelconque tracé sur la sphère on élève une perpendiculaire, elle passera par le centre de la sphère, et la coupera en deux points, dont chacun sera également éloigné de tous ceux de la circonférence du cercle proposé. . . . *Ib.*

293. *Corollaire.* — Chacun de ces points, que l'on nomme *pôles*, peut servir à décrire ce cercle; — La droite qui les joint est l'*axe* du même cercle. 200

294. *Théorème.* — Le plan mené par un point de la surface de la sphère, perpendiculairement au rayon qui passe par ce point, est tangent à la sphère; et réciproquement, le plan tangent à un point quelconque de la surface sphérique est perpendiculaire à l'extrémité du rayon. . . . . *Ib.*

295. *Théorème.* — Deux portions correspondantes de polygones réguliers, l'une inscrite et l'autre circonscrite au cercle générateur de la sphère, décrivent, en tournant autour du diamètre de ce cercle, deux corps dont les aires peuvent différer de moins qu'aucune grandeur donnée; — L'aire de chacun de ces corps a pour mesure le produit de sa hauteur par la circonférence du cercle inscrit au polygone qui l'engendre. 201

296. *Corollaire.* — L'aire du corps inscrit est moindre que celle de la portion correspondante de la sphère, et l'aire du corps circonscrit est plus grande; mais on peut toujours trouver deux de ces corps dont l'aire diffère aussi peu qu'on voudra de celle de la portion de sphère. 203

297. *Théorème.* — L'aire de la *calotte sphérique* est égale à sa hauteur multipliée par la circonférence d'un grand cercle. 204

Pages

298. 1^er^ *corollaire.* — L'aire de la sphère entière est égale à son diamètre multiplié par la circonférence d'un grand cercle, et celle d'une zone quelconque est égale au produit de la hauteur de cette zone par la circonférence d'un grand cercle. 204

299. 2^e^ *corollaire.* — L'aire de la surface sphérique est quadruple de celle d'un de ces grands cercles. 205

300. *Théorème.* — L'aire du *fuseau sphérique* est à celle de la sphère comme l'angle plan qui mesure l'angle dièdre que forment les plans qui déterminent ce fuseau est à quatre droits. . . . . *Ib.*

301. *Théorème.* — L'aire d'un triangle sphérique est à celle de la sphère entière, comme la différence entre la somme des trois angles dièdres formés par les plans des cercles qui composent ce triangle et deux angles droits est à huit angles droits. 206

Note où l'on démontre, pour la proposition précédente, que deux triangles sphériques qui ont leurs côtés égaux chacun à chacun, mais assemblés dans un ordre inverse, sont équivalents. . . . . *Ib.*

302. *Théorème.* — La différence entre les volumes des corps engendrés par deux portions correspondantes de polygones réguliers, l'une inscrite et l'autre circonscrite à un arc de cercle, pendant la révolution de cet arc autour de son axe, et fermés par la surface conique décrite dans la même circonstance par le rayon qui termine les deux portions de polygone, peut devenir aussi petite qu'on voudra; — Le volume de chacun de ces corps a pour mesure la somme des aires décrites par les côtés du polygone générateur multipliée par le tiers du rayon du cercle inscrit à ce polygone. 209

303. *Corollaire.* — Le *secteur sphérique* engendré par la révolution du secteur circulaire est moindre que le corps circonscrit et plus grand que l'inscrit; mais sa différence avec l'un ou avec l'autre de ces corps peut être rendue aussi petite qu'on voudra. 211

Pages.

304. *Théorème.* — Le volume d'un secteur sphérique est égal à l'aire de la calotte sur laquelle il s'appuie, multipliée par le tiers du rayon. 211

305. 1er *corollaire.* — Le volume de la sphère est égal à son aire multipliée par le tiers du rayon, ou à l'aire de son grand cercle multipliée par les deux tiers du diamètre. 212

306. 2e *corollaire.* — La mesure du secteur sphérique, lorsqu'il surpasse la demi-sphère, est encore la même que dans le no **304**. . . . . *Ib.*

307. 3e *corollaire.* — Le volume de la portion de sphère engendrée par le demi-segment circulaire, et qu'on nomme *segment sphérique*, s'obtiendra en retranchant du volume du secteur sphérique celui du cône correspondant; — Le volume de la zone s'obtiendra en le considérant comme la différence des deux segments formés dans la sphère par les plans qui terminent cette zone . . . . . . *Ib.*

De la comparaison des corps ronds 213

308. Les corps ronds semblables sont ceux qui sont engendrés par des figures semblables; — Dans les cônes semblables, les côtés, les hauteurs, les rayons des bases, leurs circonférences, sont proportionnels, et les aires des bases sont comme les carrés de leurs lignes homologues; la même chose a lieu à l'égard des cylindres semblables; — Les sphères sont des corps semblables. . . . . *Ib.*

309. *Théorème.* — Les aires des cônes semblables sont comme les carrés des côtés de ces cônes, et leurs volumes comme les cubes de ces mêmes côtés. . . . . *Ib.*

310. *Théorème.* — Les aires des cylindres semblables sont comme les carrés des côtés de ces cylindres, et leurs volumes comme les cubes de ces mêmes côtés 214

311. *Théorème.* — Les aires de deux sphères sont comme les carrés de leurs rayons ou de leurs diamètres, et leurs volumes comme les cubes de ces mêmes lignes. . 215

312. *Remarque.* — L'aire convexe du cylindre circonscrit à la sphère est égale à celle de cette sphère, et le

Pages.

volume de ce dernier corps n'est que les deux tiers de celui du premier.. 216

313. Conclusion dans laquelle on montre qu'il ne peut y avoir plus de cinq espèces de polyèdres réguliers, et que les faces de ces polyèdres ne peuvent être que des triangles équilatéraux, des carrés ou des pentagones. . . *Ib.*

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

SUPPLÉMENT

AU

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE D'ARITHMÉTIQUE,

NÉCESSAIRE POUR PASSER IMMÉDIATEMENT DE CE TRAITÉ

aux Éléments de Géométrie.

I. Pour abréger le discours, on exprime par des signes particuliers les mots qui reviennent le plus fréquemment; et quand on s'occupe d'un nombre ou d'une grandeur quelconque, sans considérer sa valeur particulière, mais seulement pour indiquer ses relations avec d'autres grandeurs, ou les opérations auxquelles elle doit être soumise, on la désigne par une lettre de l'alphabet, qui devient alors le nom abrégé de cette grandeur.

$+$ *signifie* plus *ou* ajouté avec.

L'expression $A + B$ indique la somme qui résulte de la grandeur que représente la lettre A ajoutée avec celle qui représente B, ou A *plus* B.

$-$ *signifie* moins.

$A - B$ indique ce qui reste quand on ôte de la grandeur que représente A celle que représente B, ou A *moins* B.

$\times$ *signifie* multiplié par.

$A \times B$ indique le produit de la grandeur que représente A multipliée par celle que représente B, ou A *multiplié par* B.

$\frac{A}{B}$ indique le quotient de la grandeur que représente A divisée par celle que représente B, ou A *divisé par* B.

$A = B$ *signifie* que la grandeur que représente A est égale à celle que représente B, ou A *égale* B.

$A > B$ *signifie* que la grandeur que représente A surpasse celle que représente B, ou A *plus grand que* B.

$A < B$ *signifie* que la grandeur représentée par A est moindre que celle qui est représentée par B, ou A *plus petit que* B.

2 A, 3 A, etc., indiquent le *double*, le *triple*, etc., de la grandeur que représente A.

II. Lorsqu'on multiplie un nombre par lui-même, on forme sa *seconde puissance* ou son *carré* : 5×5, ou 25, est la seconde puissance de 5, ou le carré de 5.

La seconde puissance est donc le produit de deux facteurs égaux; chacun de ces facteurs est la *racine carrée* du produit : 5 est la racine carrée de 25.

Si l'on multiplie la seconde puissance par sa racine, on a la *troisième puissance* ou le *cube* : 5×25, ou 125, est la troisième puissance de 5.

La troisième puissance est un produit formé par la multiplication de trois facteurs égaux; chacun de ces facteurs est la *racine cubique* de ce produit : 125 est le produit de 5 multiplié deux fois par lui-même, ou $5 \times 5 \times 5$; et 5 est la racine cubique de 125.

En général, A^2, étant l'abréviation de $A \times A$, indique la seconde puissance ou le carré de A.

$\sqrt{A}$ indique la racine carrée de A ou le nombre qui, multiplié par lui-même, produirait le nombre que représente A.

A^3, étant l'abréviation de $A \times A \times A$, indique la troisième puissance ou le cube de A.

$\sqrt[3]{A}$ indique la racine cubique de A ou le nombre qui, multiplié deux fois par lui-même, produirait le nombre A.

Tous les nombres ne sont pas des carrés ou des cubes parfaits, c'est-à-dire n'ont pas des racines carrées ou cubiques qu'on puisse exprimer exactement : 19, par exemple, se trouvant entre 16, qui est le carré de 4, et 25, qui est le carré de 5, a pour racine un nombre compris entre 4 et 5, mais qu'on ne saurait assigner exactement, même avec le secours des fractions : c'est un *incommensurable.*

De même, 89, se trouvant entre 64, qui est le cube de 4, et 125, qui est celui de 5, a pour racine cubique un nombre compris entre 4 et 5, mais qu'on ne saurait non plus assigner exactement. On trouvera dans les *Éléments d'Algèbre*, des méthodes pour approcher aussi près qu'on voudra des racines carrées et des racines cubiques des nombres qui ne sont pas des carrés ou des cubes parfaits.

(*Les trois articles suivants doivent être étudiés avant le* n° 58.)

III. Lorsque deux proportions ont un rapport commun, il est visible qu'on peut mettre en proportion les deux autres rapports, parce qu'ils sont égaux à celui qui est commun.

Si l'on a

$$A : B :: C : D,$$
$$E : F :: C : D,$$

il en résultera nécessairement

$$A : B :: E : F.$$

Lorsque deux proportions ont les mêmes antécédents, on peut mettre les conséquents en proportion ; car si l'on a

$$A : B :: C : D,$$
$$A : E :: C : F,$$

en changeant les moyens de place, ces proportions deviendront

$$A : C :: B : D,$$
$$A : C :: E : F,$$

et l'on en conclura

$$B : D :: E : F,$$

ce qui revient à

$$B : E :: D : F.$$

IV. On peut faire encore dans les proportions d'autres changements que les transpositions de termes, qui ne troublent pas l'égalité du produit des extrêmes avec celui des moyens.

1°. Si au conséquent d'un rapport on ajoute son antécédent, et que l'on compare cette somme à l'antécédent, celui-ci y sera contenu une fois de plus qu'il ne l'était dans le premier conséquent; le nouveau rapport sera donc égal au rapport primitif augmenté de l'unité. Si l'on fait la même opération sur les deux rapports d'une proportion, il en résultera évidemment deux nouveaux rapports égaux entre eux, et, par conséquent, une nouvelle proportion.

Soit, par exemple, la proportion

$$4 : 6 :: 12 : 18;$$

on aura

$$6+4 : 4 :: 18+12 : 12,$$

ou

$$10 : 4 :: 30 : 12.$$

2°. Si du conséquent d'un rapport on retranche l'antécédent, et que l'on compare la différence à l'antécédent, celui-ci y sera contenu une fois de moins que dans le premier conséquent : le nouveau rapport sera donc égal au rapport primitif diminué de l'unité. Si l'on fait la même opération sur les deux rapports d'une proportion, il en résultera deux nouveaux rapports égaux entre eux, et, par conséquent, une nouvelle proportion.

De la proportion

$$4 : 6 :: 12 : 18,$$

on déduira ainsi

$$6-4 : 4 :: 18-12 : 12,$$

ou

$$2 : 4 :: 6 : 12.$$

Pour une proportion entre des grandeurs quelconques, désignées par des lettres,

$$A : B :: C : D,$$

on aura par les changements ci-dessus,

$$B + A : A :: D + C : C,$$
$$B - A : A :: D - C : C.$$

Si l'on change les moyens de place dans ces dernières, il viendra

$$B + A : D + C :: A : C,$$
$$B - A : D - C :: A : C;$$

mais par le même changement, la proportion

$$A : B :: C : D$$

donne aussi

$$A : C :: B : D,$$

et puisque les rapports $A : C$, $B : D$ sont égaux, on en conclura

$$B + A : D + C :: A : C \text{ ou } :: B : D,$$
$$B - A : D - C :: A : C \text{ ou } :: B : D,$$

résultat qui s'énonce ainsi :

Dans une proportion quelconque, la somme ou la différence des deux premiers termes est à la somme ou à la différence des deux derniers, comme le premier est au troisième, ou comme le deuxième est au quatrième

De plus, les deux rapports $A : C$ ou $B : D$ étant communs aux deux dernières proportions ci-dessus, il en résulte que les autres rapports des mêmes proportions sont égaux, et que, par conséquent,

$$B + A : D + C :: B - A : D - C,$$

ou, en changeant les moyens de place,

$$B + A : B - A :: D + C : D - C;$$

c'est-à-dire que *la somme des deux premiers termes* *d'une proportion est à leur différence, comme la somme des deux derniers est à leur différence.*

Par exemple,

$$6 + 4 : 6 - 4 :: 18 + 12 : 18 - 12,$$

ou

$$10 : 2 :: 30 : 6.$$

Lorsque la proportion

$$A : B :: C : D$$

est changée en

$$A : C :: B : D,$$

A et B sont les antécédents, C et D les conséquents, et les proportions

$$B + A : D + C :: A : C \text{ ou } :: B : D,$$
$$B - A : D - C :: A : C \text{ ou } :: B : D$$

répondent à l'énoncé suivant :

La somme ou la différence des antécédents d'une proportion est à la somme ou à la différence des conséquents comme un antécédent est à son conséquent.

On en déduit : *La somme des antécédents est à leur différence comme la somme des conséquents est à leur différence.*

Si l'on a une suite de rapports égaux

$$A : B :: C : D :: E : F,$$

en ne considérant d'abord que les deux premiers, qui forment la proportion

$$A : B :: C : D,$$

on en tire, par ce qui précède,

$$A + C : B + D :: A : B;$$

et puisque le troisième rapport $E : F$ est égal au premier $A : B$, on aura

$$A + C : B + D :: E : F.$$

Si l'on prend la somme des antécédents et celle des conséquents dans cette dernière proportion, il en résultera

$$A + C + E : B + D + F :: E : F \text{ ou } :: A : B.$$

En suivant la même marche, quel que fût le nombre des rapports égaux, on aurait en dernier lieu : *La somme d'un nombre quelconque d'antécédents est à la somme de leurs conséquents, comme un antécédent est à son conséquent.*

V. Lorsqu'on a deux proportions quelconques

$$A : B :: C : D,$$
$$E : F :: G : H,$$

et qu'on les multiplie par *ordre*, c'est-à-dire terme à terme, les produits forment une proportion où l'on a

$$A \times E : B \times F :: C \times G : D \times H.$$

Cela est évident, puisque les nouveaux rapports $\frac{B \times F}{A \times E}$, $\frac{D \times H}{C \times G}$ seront respectivement les produits des rapports primitifs

$$\frac{B}{A} \text{ et } \frac{F}{E}, \quad \frac{D}{C} \text{ et } \frac{H}{G},$$

qui sont égaux.

Si l'on multiplie la proportion

$$A : B :: C : D,$$

par

$$A : B :: C : D,$$

on aura (II)

$$A^2 : B^2 :: C^2 : D^2,$$

d'où il suit que *les carrés de quatre quantités en proportion forment une nouvelle proportion.*

d.

En multipliant la proportion

$$A^2 : B^2 :: C^2 : D^2,$$

par

$$A : B :: C : D,$$

on aura

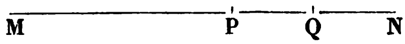
$$A^3 : B^3 :: C^3 : D^3,$$

c'est-à-dire que *les cubes de quatre quantités en proportion forment une nouvelle proportion.*

(*Les deux articles suivants se rapportent au n°* 76.)

VI. On considère souvent des grandeurs décomposées en plusieurs parties, et l'on a besoin de les ajouter, de les soustraire, ou de les multiplier dans cet état, c'est-à-dire de déterminer comment les résultats de ces opérations sont formés avec les parties des grandeurs proposées. Voici quelques règles à ce sujet.

1°. Il est évident que si l'on veut ajouter la grandeur B — C avec la grandeur A, il faut écrire A + B — C, puisque ce n'est ni B ni C qu'on se propose d'ajouter avec A, mais seulement l'excès de B sur C :

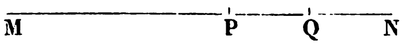


D'ailleurs si l'on prend les droites MP, PN et QN pour représenter les grandeurs A, B et C, on verra que

$$PQ = PN - QN,$$
$$MP + PQ = MP + PN - QN.$$

2°. Si de la grandeur A on voulait ôter la grandeur B — C, il faudrait écrire A + C — B, ou, ce qui est la même chose, A — B + C.

En effet, la différence de deux grandeurs ne change pas lorsqu'on ajoute à chacune la même grandeur ; or si l'on ajoute C à B — C, il viendra B. En faisant la même addition à la grandeur A, on obtient A + C, et la soustraction de B donne alors $A + C - B$:



La figure ci-dessus confirme ce résultat ; car si l'on prend les droites MN, PN, PQ pour les grandeurs A, B, C, on a

$$QN = PN - PQ,$$
$$MN - QN = MQ = MP + PQ;$$

et puisque $MP = MN - PN$, il viendra

$$MP + PQ = MN - PN + PQ,$$

résultat qui répond à $A - B + C$.

3°. Le produit de la grandeur A par la grandeur $B + C$ est exprimé par $A \times B + A \times C$; car il doit renfermer autant de fois le nombre A qu'il y a d'unités dans la somme des nombres B et C, et doit, par conséquent, être composé de A pris autant de fois qu'il y a d'unités dans B, plus de A pris autant de fois qu'il y a d'unités dans C, ce qui s'écrit $A \times B + A \times C$.

4°. Le produit de A par $B - C$ est exprimé par $A \times B - A \times C$; car si l'on représente $B - C$ par D, on aura visiblement $B = D + C$, et, par conséquent, $A \times B = A \times D + A \times C$: on conclura de là que $A \times D = A \times B - A \times C$, ce qui forme la proposition avancée ci-dessus, puisque $D = B - C$.

VII. Il suit de ce qui précède, que *le carré d'un nombre composé de deux parties renferme le carré de la première, deux fois le produit de la première par la seconde, et le carré de la seconde.* Le nombre 13, par exemple, étant envisagé comme égal à $9 + 4$, son carré 169 est composé

du carré de 9,	ou	81
de 2 fois 9×4,	ou	72
du carré de 4,	ou	16
Total.		169

Pour prouver l'énoncé en général, il suffit d'observer que le produit de A par $B + C$ étant $A \times B + A \times C$, si l'on fait $A = B + C$, les produits partiels $A \times B$ et $A \times C$ deviendront $B \times B + B \times C$, et $B \times C + C \times C$; en les réunissant, on obtiendra le résultat

$$B \times B + B \times C + B \times C + C \times C,$$

qui peut s'écrire ainsi,

$$B^2 + 2 B \times C + C^2;$$

ce qui donne le carré de $B + C$, conforme à l'énoncé ci-dessus.

On trouve d'une manière semblable que *le carré de la différence de deux grandeurs est composé du carré de la première, moins deux fois le produit de la première par la seconde, plus le carré de la seconde*. Le nombre 9 étant égal à $13 - 4$, par exemple, son carré 81 sera formé de $169 -$ 2 fois $4 \times 13 + 16$, ce qu'il est aisé de vérifier.

La démonstration générale de la proposition ci-dessus se forme en faisant $A = B - C$, dans le produit de A par la différence $B - C$; car ce produit étant exprimé par $A \times B - A \times C$, si l'on écrit d'abord $B - C$ au lieu de A, dans les produits $A \times B$ et $A \times C$, ils deviendront respectivement

$$B \times B - B \times C \text{ et } B \times C - C \times C;$$

et pour retrancher le second du premier, il faudra, d'après l'article VI, écrire

$$B \times B - B \times C - B \times C + C \times C,$$

ce qui revient à

$$B^2 - 2 B \times C + C^2,$$

et donne le carré de $B - C$, conformément à l'énoncé ci-dessus.

Les notions précédentes suffisent pour entendre les propositions nécessaires de la Géométrie; car on peut, dans le n° **141**, se borner à la solution graphique, et passer les n^{os} 150, 156, 157, qui ne servent qu'à calculer le rapport de la circonférence au diamètre, qu'on peut obtenir facilement en Trigonométrie par les sinus et les tangentes des petits arcs.

(*Les articles ci-dessous, qui concernent l'évaluation des aires et des volumes, autrement,* le toisé des surfaces et des solides, *se rapportent à la fin de la première partie et à celle de la seconde.*)

VIII. Le rapprochement des expressions, ou *formules* d'après lesquelles se calculent les aires

du parallélogramme (n° **170**),
du triangle (n° **171**),
du trapèze (n° **175**),
du cercle (n° **187**),
enfin, du secteur circulaire (n° **189**),

montre que la détermination de toutes ces aires ne dépend que d'un produit de deux facteurs, qu'on peut toujours regarder comme la base et la hauteur, c'est-à-dire les *deux dimensions* d'un rectangle équivalent à l'aire cherchée. Quand ces facteurs sont exprimés en mesures décimales, leur multiplication s'effectue à l'ordinaire; mais la dénomination des unités du résultat demande quelques attentions.

Soit pour exemple un rectangle de $49^m,54$ de base sur $15^m,27$ de hauteur; en multipliant ces deux nombres, on trouve 756,4758. L'unité de ce nombre est le carré ayant un mètre de côté, qu'on nomme aussi le *mètre carré*; les fractions décimales en sont toujours la dixième, la centième, la millième, etc., partie. La mesure ci-dessus pourrait donc s'énoncer ainsi : 756 mètres carrés et 4758 dix-millièmes de mètre carré; mais plus ordinairement on fait correspondre les subdivisions du mètre carré avec celle du mètre linéaire, et alors on doit observer que :

Le mètre carré contient 100 carrés d'un décimètre de côté, ou cent *décimètres carrés ;*

Le décimètre carré contient 100 carrés d'un centimètre de côté, ou 100 *centimètres carrés ;* et ainsi de suite.

C'est donc les centièmes du mètre carré qui expriment les décimètres carrés, les dix-millièmes qui expriment les centimètres carrés, les millionièmes qui expriment les millimètres carrés. D'après cela, le nombre 756,4758 s'énonce

756 mètres carrés, 47 décimètres carrés, 58 centimètres carrés.

On juge par là qu'il n'est pas permis de confondre le 10^e du mètre carré avec le décimètre carré. La première de ces subdivisions ne saurait se représenter par un carré dont les dimensions soient des nombres exacts, puisque l'unité n'en contient que 10, et que 10 n'est pas un carré parfait.

On peut rapporter commodément le 10^e du mètre carré à un rectangle de 1 mètre de base sur 1 décimètre de hauteur; et il en est de même des fractions décimales qui suivent et qui désignent isolément des rectangles de 1 mètre de base sur 1 centimètre, 1 millimètre, etc., de hauteur.

Ce n'est qu'en séparant les chiffres de deux en deux, à partir de la virgule, qu'on peut énoncer le nombre en mesures carrées.

Quand les chiffres décimaux sont en nombre impair, il faut écrire un zéro à la droite, pour que le dernier ordre de décimales soit rapporté à des mesures carrées.

Le rectangle ayant 27 mètres de base sur $4^m,3$ de hauteur par exemple, a pour mesure en mètres carrés, 116,1.

En mettant un zéro à la droite de ce nombre, il devient 116,10, et s'énonce 116 mètres carrés et 10 décimètres carrés.

Ce que je viens de dire s'applique également aux divers ordres d'unités placés à la gauche de la virgule; et en observant que l'*are*, étant un carré de 10 mètres de côté, renferme 100 mètres carrés, que l'hectare renferme 100 ares, le nombre 37549 mètres carrés, par exemple, se décompose en 3 hectares, 75 ares et 49 mètres carrés, ou centiares.

Il est à propos de fixer le sens de plusieurs expressions que l'on confond quelquefois. Que l'on dise un mètre carré ou un mètre en carré, cela revient au même, puisqu'il ne peut être question, dans les deux cas, que d'un carré ayant un mètre de côté; mais il faut soigneusement distinguer les espaces de 10 *mètres carrés*, et de 10 *mètres en carré*, par exemple : car l'un indique une aire équivalente à 10 carrés d'un mètre de côté, et l'autre un seul carré ayant 10 mètres de côté, et comprenant, par conséquent, 100 mètres carrés.

L'usage des mesures décimales simplifie considérablement les calculs du toisé. Avec les anciennes mesures, le premier moyen qui se présente est de convertir chacun des facteurs, dans les subdivisions de la plus petite espèce qui soit contenue dans les deux, afin que le résultat soit exprimé en mesures carrées ayant cette subdivision pour côté. S'il y a, par exemple, des lignes dans l'un des facteurs, il faut les réduire tous deux en lignes; le produit sera des lignes carrées. Pour remonter à des mesures plus grandes, on observera que

Le pouce carré vaut	12×12,	ou	144 lignes carrées;
Le pied carré	12×12,	ou	144 pouces carrés;
La toise carrée	6×6,	ou	36 pieds carrés;

et en divisant successivement par ces nombres, on traduira le résultat en toises carrées, pieds et pouces carrés.

On se servait peu de ce moyen, parce qu'il conduit à opérer sur de trop grands nombres; mais on faisait usage du procédé qui sert à effectuer la multiplication des nombres complexes. Que les deux dimensions à multiplier soient, par exemple,

$$49^{t}\,5^{pi}\,7^{po} \quad \text{et} \quad 32^{t}\,4^{pi}\,5^{po}.$$

Si l'on choisit le premier pour multiplicande, on concevra d'abord un rectangle ayant $49^{t}\,5^{pi}\,7^{po}$ de base sur 1^{t} de hauteur, et qui sera, par conséquent, à celui dont on cherche la mesure comme $1^{t} : 32^{t}\,4^{pi}\,5^{po}$ (166). Il sera permis, en conséquence, de regarder le multiplicateur $32^{t}\,4^{pi}\,5^{po}$ comme un nombre abstrait : or un rectangle de $49^{t}\,5^{pi}\,7^{po}$ de base sur 1^{t} de hauteur se décompose dans les suivants :

1°. Un rectangle de 49 toises de base sur 1 toise de hauteur, et contenant 49 toises carrées.

2°. Cinq rectangles ayant chacun 1 pied de base sur 1 toise de hauteur. Ces rectangles se nomment *toises-pieds;* il est visible qu'il en faut 6 pour former la toise carrée.

3°. Sept rectangles de 1 pouce de base sur 1 toise de hauteur. Ces rectangles se nomment *toises-pouces;* il en faut évidemment 12 pour former la toise-pied.

En continuant de même on arriverait, s'il y avait lieu, aux *toises-lignes, toises-points,* qui auraient entre elles et avec la toise carrée les mêmes rapports que les subdivisions linéaires qui leur servent de base. Les abréviations de ces mesures, en commençant par la toise carrée, sont

t. t., t. pi., t. po., t. l., t. pt.

Cela posé, l'emploi des parties aliquotes, conformément aux règles exposées à la fin du *Traité élémentaire* *d'Arithmétique*, donne l'opération suivante :

	$49^{t.t}$	$5^{t.pi}$	$7^{t.po}$		
	32^{t}	4^{p}	5^{po}		
	98				
	147				
Pour $3^{t.pi}$	16				
$1^{t.pi}$	5	2			
$1^{t.pi}$	5	2			
Pour $6^{t.po}$	2	4			
$1^{t.po}$		2	8		
Pour 3^{pi}	24	5	9	$6^{t.l}$	
1^{pi}	8	1	11	2	
Pour 4^{po}	2	4	7	8	$8^{t.pt}$
1^{po}			1	11	2
Produit total	$1634^{t.t}$	$3^{t.p}$	$2^{t.po}$	$3^{t.l}$	$10^{t.pt}$

Excepté la première partie de ce résultat, qui est exprimée en toises carrées, les autres sont des rectangles; mais leur conversion en pieds carrés, pouces carrés, etc., est facile : car

La toise-pied vaut $6^{pi} \times 1^{pi}$, ou 6 pieds carrés;

La toise-pouce vaut $\frac{1^{t.pi}}{12}$, ou $\frac{1}{2}$ pied carré, ou 72 pouces carrés;

La toise-ligne vaut $\frac{1^{t.po}}{12}$, ou 6 pouces carrés;

La toise-point vaut $\frac{1^{t.l}}{12}$, ou $\frac{1}{2}$ pouce carré, ou 72 lignes carrées.

En multipliant donc respectivement par $6, \frac{1}{2}, 6, \frac{1}{2}$, les toises-pouces, les toises-pieds, toises-lignes et toises-points du produit obtenu ci-dessus, on trouve 1634 toises carrées, 19 pieds carrés et 23 pouces carrés.

La toise carrée et ses parties ne servaient qu'à la mesure des petites aires; les champs s'évaluaient en *perches* et en *arpents*. Ces dernières mesures ont varié suivant le temps et les lieux. On trouve, dans les Tables de l'*Arithmétique*, deux sortes d'arpents comparés avec les nouvelles mesures agraires, savoir l'*arpent des Eaux et Forêts* et l'*arpent de Paris*. L'un et l'autre étaient composés de 100 perches; la perche, qu'on aurait dû nommer *perche carrée*, était un carré qui, dans l'arpent des Eaux et Forêts, avait 22 pieds de côté, et seulement 18 dans celui de Paris. Le rapport des perches, le même que celui des deux arpents, est celui des carrés des nombres 22 et 18, c'est-à-dire de 484 à 324, qui revient à peu près au rapport de 3 à 2.

La perche de Paris ayant 18 pieds, ou 3 toises de côté, contenait 9 toises carrées; et l'arpent du même lieu, contenant exactement 900 toises carrées, était plus commode que l'autre. Mais toutes ces mesures sont bien inférieures aux mesures décimales, dans lesquelles on les transformera facilement au moyen des Tables citées. Et d'ailleurs, en convertissant en mètres et parties décimales du mètre les dimensions de la mesure proposée, leur produit donnerait le rapport de cette mesure au mètre carré.

Il n'est question, dans ces éléments, que des figures terminées par des lignes droites ou par des circonférences de cercle; mais les formules citées au commencement de cet article servent aussi, dans la plupart des cas de la pratique, au toisé des aires enveloppées par des lignes courbes, parce qu'en partageant ces lignes courbes en petites portions sensiblement droites, on ramène la figure proposée à un polygone rectiligne.

IX. Les expressions des volumes

du prisme (nº **260**),
de la pyramide (nº **262**),
du prisme triangulaire tronqué (nº **265**),
du cône (nº **275**),
du cylindre (nº **283**),
et de la sphère (nºs **304-306**),

étant toutes composées du produit d'une aire par une hauteur, dépendent nécessairement d'un produit de trois facteurs, puisque l'aire en contient deux; et ce produit revient à l'expression d'un parallélépipède rectangle (257) équivalent au corps proposé. C'est dans ce sens qu'on dit qu'un volume quelconque est le produit de 3 *dimensions*. Leur multiplication se fait à l'ordinaire, quand elles sont exprimées en mesures décimales; et le résultat est composé d'un nombre entier et de parties décimales d'un cube ayant pour côté l'unité linéaire.

Je prends pour exemple un parallélépipède rectangle, dont les dimensions sont $49^{m},54$, $15^{m},27$ et $8^{m},5$. Le produit 6430,0443 de ces nombres fait voir que le parallélépipède proposé contient 6430 cubes de 1 mètre de côté, et 443 dix-millièmes de ce cube.

Les décimales énoncées ci-dessus ne sont rapportées qu'à l'unité principale, qui est le cube d'un mètre de côté, et qu'on nomme aussi *mètre cube :* si l'on veut les décomposer en parties qui soient les cubes des parties décimales de l'unité linéaire, il faut remarquer que

Le mètre cube contient $10 \times 10 \times 10$, ou 1000 *décim. cubes;*
Le décimètre cube $10 \times 10 \times 10$, ou 1000 *centim. cubes,*

et ainsi des autres; que, par conséquent, ce sont les millièmes et les millionièmes du mètre cube qui expriment les décimètres cubes et les centimètres cubes, et, en général, les décimales prises de 3 en 3, qui répondent à des mesures cubiques.

Le résultat 6430,0443 ne renfermant pas un nombre de chiffres décimaux qui soit multiple de 3, il faut y suppléer par des zéros, et l'écrire ainsi :

6430,044300.

De cette manière, on l'énonce en disant :

6430 mètres cubes, 44 décimètres cubes et 300 centim. cubes.

Il est inutile d'entrer dans de plus grands détails sur ce sujet; car il sera beaucoup plus commode de s'en tenir à la première énonciation, pourvu qu'on ait soin de ne pas confondre le 10^e, le 100^e, etc., du mètre cube, avec le décimètre, le centimètre, etc., cubes. Les premiers se rapportent à des parallélépipèdes rectangles ayant tous pour base le mètre carré, et pour hauteur 1 décimètre, 1 centimètre, etc.

Quand, avec les anciennes mesures, on ne voulait opérer que sur des nombres entiers, on convertissait chacun des facteurs du volume cherché dans les subdivisions de la plus petite espèce qu'il y eût dans les trois; le produit se trouvait exprimé en cubes ayant cette subdivision pour côté, en lignes cubes par exemple, si les facteurs étaient convertis en lignes. On parvenait ensuite à des mesures plus grandes, en observant que

Le pouce cube vaut $12 \times 12 \times 12$, ou 1728 lignes cubes;
Le pied cube........................ 1728 pouces cubes;
La toise cube..... $6 \times 6 \times 6$, ou 216 pieds cubes,

et en divisant, tant que cela était possible, par ces nombres.

Le plus ordinairement on laissait les facteurs sous leur forme de nombres complexes. En multipliant deux des facteurs entre eux, on calculait d'abord en toises carrées, toises-pieds, toises-pouces, etc., l'aire qui devait servir de base au volume cherché (considéré comme celui d'un parallélépipède rectangle), puis on regardait cette aire comme la base d'un parallélépipède rectangle ayant 1 toise de hauteur, et étant, par conséquent, au corps cherché comme l'unité est au troisième facteur, qui alors pouvait être regardé comme un nombre abstrait. Il est visible que:

1°. 1 toise carrée de base sur 1 toise de hauteur forme un cube d'une toise de côté, ou une *toise cube*.

2°. 1 toise-pied, c'est-à-dire un rectangle de 1 toise de long sur un pied de large étant pris pour base d'un parallélépipède rectangle de 1 toise de hauteur, ce parallélépipède a deux arêtes contiguës de 1 toise, et peut aussi être envisagé comme ayant 1 toise carrée de base sur 1 pied de haut; on lui donne pour cette raison le nom de *toise-toise-pied;* ce qui s'écrit *t.t.pi.* Il en faut 6 pour former la toise cube.

3°. 1 toise-pouce sur 1 toise de hauteur forme de même un parallélépipède de 1 toise carrée de base sur 1 pouce de haut, qu'on nomme *toise-toise-pouce,* qui s'indique par *t.t.po.* Il en faut 12 pour former la toise-toise-pied.

4°. La même progression fournit ensuite des *toises-toises-lignes,* ou *t.t.l, toises-toises-points,* ou *t.t.pt.*

Le volume du parallélépipède de 1 toise de haut se trouve ainsi exprimé par un nombre qui se rapporte à des subdivisions assez simples; et il ne s'agit plus que de multiplier, à l'aide des parties aliquotes, ce nombre par la hauteur du parallélépipède proposé.

Voici pour exemple le parallélépipède rectangle, dont les dimensions sont

$$49^{t}\,5^{pi}\,7^{po},\quad 32^{t}\,4^{pi}\,5^{po}\quad \text{et}\quad 5^{t}\,2^{pi}\,10^{po}.$$

Les deux premières, déjà employées dans l'article VIII (page LV), donnent pour produit

$$1634^{t.t}\,3^{t.pi}\,2^{t.po}\,3^{t.l}\,10^{t.pt}.$$

Un parallélépipède construit sur cette base et sur une toise de hauteur contiendrait

$$1634^{t.t.t}\,3^{t.t.pi}\,2^{t.t.po}\,3^{t.t.l}\,10^{t.t.pt};$$

multipliant ce nombre par $5^{t}\,2^{pi}\,10^{po}$, hauteur du parallélépipède proposé, on aura le volume de ce dernier,

	$1634^{t.t.t}$	$3^{t.t.pi}$	$2^{t.t.po}$	$3^{t.t.l}$	$10^{t.t.pt}$	
	5^{t}	2^{pi}	10^{po}			
	8170					
Pour $2^{t.t.pi}$	1	4				
$1^{t.t.pi}$		5				
Pour $2^{t.t.po}$			10			
Pour $3^{t.t.l}$			1	3		
Pour $6^{t.t.pt}$				2	6	
$2^{t.t.pt}$					10	
$2^{t.t.pt}$					10	
Pour 2^{pi}	544	5	0	9	3	$\frac{4}{12}$
Pour 6^{po}	136	1	3	2	3	$\frac{10}{12}$
2^{po}	45	2	5	0	9	$\frac{3}{12}$
2^{po}	45	2	5	0	9	$\frac{3}{12}$
Produit total.	$8944^{t.t.t}$	$3^{t.t.pi}$	$1^{t.t.po}$	$8^{t.t.l}$	$3^{t.t.pt}$	$\frac{8}{12}$.

Au lieu de $\frac{8}{12}$, on peut ajouter une unité aux toises-toises-points.

Dans la pratique, on a rarement besoin de pousser les calculs jusqu'aux dernières subdivisions, comme je l'ai fait ci-dessus, parce que leur valeur est presque nulle; et quand il ne s'agit que de déterminer le prix d'un ouvrage, la forme de ces subdivisions est la plus commode. Cependant on les réduit quelquefois en mesures cubiques, et pour cela, il suffit d'observer que

La toise cube contenant 216 pieds cubes,
La toise-toise-pied en contient $\frac{216}{6}$, ou 36;
La toise-toise-pouce........ $\frac{36}{12}$, ou 3;
La toise-toise-ligne. ... ... $\frac{3}{12}$, ou $\frac{1}{4}$, ou 432 pouces cubes (puisque le pied cube contient 1728 pouces cubes);
La toise-toise-point........ $\frac{432}{12}$, ou 36 pouces cubes.

En conséquence, on multiplie respectivement par les nombres 36, 3, $\frac{1}{4}$, 36, les divers nombres des subdivisions indiquées ci-dessus, avec l'attention de multiplier par 432 le reste des toises-toises-lignes, si la division par 4 en laissait un, de compter le produit pour des pouces cubes, et de l'ajouter à ce que donneront les toises-toises-points. Le nombre

$$8944^{t.t.t}\,3^{t.t.pi}\,1^{t.t.po}\,8^{t.t.l}\,4^{t.t.pt},$$

trouvé ci-dessus, devient

8944 toises cubes, 113 pieds cubes, 144 pouces cubes.

L'usage des charpentiers était de mesurer les bois, non à la toise cube, mais à la *solive*, qu'ils établissaient de 6 pouces d'*équarrissage* sur 12 pieds de longueur, c'est-à-dire formant un parallélépipède rectangle dont la base était un carré de 6 pouces de côté, et la hauteur 12 pieds. Cette base, ayant $\frac{1}{2}$ pied de côté, contient $\frac{1}{4}$ de pied carré; et en multipliant par la hauteur 12, on trouve 3 pieds cubes pour le volume de la solive. Ce volume, pris pour unité, était divisé en 6 parties appelées *pieds de solive*, dont chacune valait par conséquent $\frac{1}{2}$ pied cube, ou 864 pouces cubes. Le pied de solive se divisait encore en 12 parties appelées *pouces de solive*, et contenant, par conséquent, chacune 72 pouces cubes.

On voit que les divisions de la solive suivaient la même loi que celles de la toise cube en toises-toises-pieds, etc.; et la solive entière, étant de 3 pieds cubes, se trouve la 72e partie de la toise cube. On peut donc, en le multipliant par 72, convertir un nombre de toises cubes, toises-toises-pieds, etc., en solives et parties de solives; par ce moyen, le *toisé des bois* rentre dans les règles du toisé général à trois dimensions. Il n'était pas difficile non plus de se former des règles particulières pour obtenir immédiatement le résultat du toisé en solives.

Mais combien l'uniformité des mesures nouvelles, qui ramène tout au mètre cube, ou *stère*, et leur subdivision décimale, qui rend toutes les opérations semblables à celles qui s'effectuent sur les nombres entiers, sont préférables à ces divers procédés, quelque ingénieux qu'ils puissent paraître. En les mettant ici sous les yeux du lecteur, en comparaison avec les calculs décimaux, j'ai eu principalement pour but de rendre plus frappant l'immense avantage de ceux-ci; avantage dont il faut espérer que sera convaincue la génération future, si son éducation est bien dirigée sur ce point. Car tant que les ouvriers ne se déferont pas du pied et de la toise qu'ils portent avec eux, qu'ils s'en serviront pour prendre leurs mesures, et qu'après avoir fait le calcul suivant ces mesures, ils auront encore, pour se conformer à la loi, à convertir les anciennes mesures en nouvelles, il est impossible qu'ils voient dans le système métrique décimal autre chose qu'une innovation importune. Enfin, il faudrait que tous ceux qui ont des nombres à prescrire, soit comme administrateurs, soit comme ingénieurs, choisissent, autant que cela se peut, des nombres ronds en nouvelles mesures, comme on le faisait dans les anciennes.

Les conversions d'un système dans l'autre, devenant de plus en plus rares, s'effectueraient sans peine par les Tables dressées depuis longtemps pour cela; et quand on n'aurait pas ces Tables sous la main, on y suppléerait en calculant, par ses dimensions exprimées en nouvelles mesures, la valeur du volume que l'on veut exprimer par ces mesures. C'est ainsi qu'en formant le cube du nombre décimal qui exprime la toise par le mètre, on aurait le rapport de la toise cube au mètre cube.

Le bois de chauffage se mesure en le rangeant dans un châssis ou *membrure;* et le tas prend la forme d'un parallélépipède rectangle qui a pour base l'aire de cette membrure, et pour hauteur la longueur des bûches. La membrure qui déterminait l'ancienne corde avait 8 pieds de long sur 4 pieds de haut, et, par conséquent, 32 pieds carrés de surface. La longueur des bûches étant de 4 pieds, la corde de bois contenait 128 pieds cubes; et, par ce nombre, on en calculerait sans peine le rapport avec le mètre cube, ou stère.

Quand les mesures ne sont pas des parallélépipèdes, mais des cylindres, comme l'étaient les litrons, les boisseaux, comme le sont les litres, leur volume se calcule au moyen des expressions propres à cette forme de corps.

OBSERVATION.

Dans la forme de raisonnement adoptée pour l'exposition des Éléments de Géométrie :

Un *axiome* est une vérité évidente par elle-même;

Un *théorème*, une proposition à démontrer;

Un *corollaire*, une conséquence d'une proposition déjà démontrée;

Un *problème*, une question à résoudre.

Une proposition qui ne sert que de préparation à une autre se nomme aussi *lemme*;

Et l'on donne aux *remarques* le nom de *scolies*.

Il est à propos d'observer qu'un théorème renferme deux parties, savoir : l'*hypothèse*, et la *conclusion*, qui en est la conséquence. Il n'est pas toujours possible de renverser l'énoncé : c'est-à-dire qu'en prenant la conclusion pour hypothèse, on n'a pas toujours pour conclusion nécessaire l'hypothèse primitive; et cela, parce que la conclusion primitive convient quelquefois à un plus grand nombre de cas que l'hypothèse. De là vient la nécessité de démontrer les propositions inverses, lorsqu'on veut en faire usage.

ÉLÉMENTS

DE

GÉOMÉTRIE.

Notions générales sur l'étendue.

1. L'espace que les corps occupent a trois dimensions, que l'on désigne par les noms de *longueur*, *largeur* et *profondeur* ou *épaisseur*.

Un corps ne saurait être privé de l'une de ces dimensions sans cesser d'exister; les limites qui le terminent, sans lesquelles il ne peut être conçu, et qui n'ont point d'épaisseur, sont des *surfaces*.

Quand un corps présente plusieurs faces, chacune a, dans le lieu où elle se joint à une autre, ses limites, qui n'ont ni épaisseur ni largeur, et qu'on nomme *lignes*.

Enfin, ces dernières ont elles-mêmes, aux endroits où elles se rencontrent, leurs limites ou leurs extrémités, qui n'ont ni épaisseur, ni largeur, ni longueur, et qui s'appellent *points*.

L'existence de ces diverses espèces de limites ne peut être révoquée en doute, puisque ce n'est que par leur moyen que nous jugeons de la figure des corps. Nous les considérons, par la pensée, chacune en particulier, en faisant abstraction d'une ou de deux des dimensions du corps, qui d'ailleurs ne sauraient être anéanties; car, comme nous ne pouvons que modifier les formes de la matière, nos opérations s'effectuent toujours sur des corps, et jamais sur des surfaces, des lignes ou des points; mais leur résultat s'éloigne d'autant moins de celui du raisonnement, que nous apportons plus de soin à diminuer les dimensions étrangères à celles de la limite que nous avons considérée sur le corps. Par le raisonnement, nous atteignons cette limite; par le calcul, nous pouvons en approcher indéfiniment, tandis que l'exactitude des opérations mécaniques trouve ses bornes dans l'imperfection inévitable des instruments.

2. Parmi les lignes, celle qui s'offre la première est la ligne droite, dont on donne une idée nette dès qu'on énonce que c'est le plus court chemin pour aller d'un point à un autre.

Dans cette idée se trouve aussi comprise la possibilité de prolonger la ligne droite indéfiniment au delà de chacun des termes qu'on lui a d'abord assignés, et l'impossibilité de le faire de plusieurs manières.

Il est évident qu'il n'y a qu'une seule ligne droite : toute ligne qui n'est pas droite, ou composée de plusieurs lignes droites, est *courbe*, et l'on sent qu'il doit y avoir un nombre infini de lignes courbes.

Parmi les différentes surfaces qui terminent les corps, on remarque d'abord le *plan* ou la surface plane, qui diffère de toute autre en ce qu'on peut y appliquer exactement ou y tracer une ligne droite dans tous les sens; il ne peut y avoir qu'une seule espèce de plan.

Toute surface qui n'est pas plane ou composée de plusieurs plans est courbe, et le nombre des surfaces courbes est infini.

J'exposerai successivement les propriétés les plus remarquables des lignes, des surfaces et des corps, en me bornant à celles qu'il est indispensablement nécessaire de connaître pour étudier avec fruit les diverses branches des Mathématiques pures et appliquées.

PREMIÈRE PARTIE.

SECTION PREMIÈRE.

DES PROPRIÉTÉS DES LIGNES DROITES ET DES LIGNES CIRCULAIRES.

N. B. — **Pour toute cette première partie, les lignes représentées dans les figures sont situées dans un même plan.**

Définitions et notions préliminaires.

3. On ne considère, dans les éléments de Géométrie, que deux espèces de lignes, savoir : la *ligne droite,* ou simplement la *droite,* qui est le plus court chemin pour aller d'un point à un autre, et la *circonférence du cercle,* ou la *ligne circulaire,* dont tous les points, situés sur le même plan, sont également éloignés d'un autre point pris dans ce plan, et qu'on nomme le *centre*.

AB (*fig.* 1) est une droite. Il est évident (2) que rien ne s'oppose à ce qu'on prolonge indéfiniment la droite AB en deçà du point A et au delà du point B, et qu'elle sera déterminée par deux autres quelconques de ses points, C et D, aussi bien que par les points A et B, c'est-à-dire que si l'on proposait de joindre par une droite les points C et D, le trait passerait sur la ligne AB.

ABEA (*fig.* 2) est une circonférence de cercle dont le centre est en O. Les droites AO, BO, CO, qui mesurent la distance des points quelconques A, B, C de cette dernière ligne au centre O, et qui sont toutes égales, se nomment les *rayons* du cercle; une partie quelconque de sa circonférence se nomme *arc;* enfin l'on entend par le *cercle* la portion du plan terminée de toutes parts par la ligne circulaire.

Il est visible que pour trouver tous les points qui sont à une distance donnée *ao* du point O, il suffit de décrire de ce point comme centre, et avec un rayon égal à *ao*, une circonférence de cercle.

Cela posé, je considérerai d'abord les lignes droites.

4. Mesurer la distance de deux points ou la longueur d'une droite, c'est chercher combien de fois cette droite en contient une autre, prise pour unité, ce qui se fait en portant la seconde sur la première autant qu'il est possible; et si l'on trouve un reste, il faut tâcher d'évaluer ce reste en fraction de la seconde ou de l'unité.

En général, mesurer une ligne par une autre, c'est chercher le rapport de ces deux lignes, ou chercher s'il n'y a pas une ligne plus petite qui soit contenue un nombre exact de fois dans l'une et dans l'autre, et qui, par conséquent, soit la commune mesure de toutes deux. Cette recherche est donc, par rapport aux lignes, ce qu'est celle du commun diviseur à l'égard des nombres.

PROBLÈME.

5. *Deux droites étant données, trouver leur commune mesure, ou au moins le rapport approché de l'une à l'autre.*

Solution. — Soient AB et CD (*fig.* 3) ces deux droites; on portera la plus petite CD sur la plus grande, autant de fois qu'elle pourra y être contenue; on trouvera qu'elle y est trois fois depuis A jusqu'en E, avec un reste EB; en sorte que l'on aura

$$AB = 3\,CD + EB.$$

On portera ensuite sur CD le reste EB, qui s'y trouvera contenu quatre fois avec un second reste FD, ce qui donnera

$$CD = 4\,EB + FD.$$

On portera ce second reste sur EB, et comme il sera contenu une fois de E en G, avec un troisième reste GB, on aura

$$EB = FD + GB.$$

Enfin, GB étant porté sur FD, et s'y trouvant trois fois, il viendra, pour dernier résultat,

$$FD = 3\,GB.$$

En remontant de la valeur de FD à celle de EB, de celle-ci à celle de CD, et de cette dernière à celle de AB, on trouvera successivement

$$FD = 3\,GB, \quad EB = 4\,GB, \quad CD = 19\,GB, \quad AB = 61\,GB;$$

d'où l'on voit que le dernier reste GB est la commune mesure des droites AB et CD; et puisqu'il est 61 fois dans la première et 19 fois dans la seconde, il s'ensuit que ces droites sont entre elles dans le rapport de 61 à 19.

Rien ne doit être plus facile maintenant que d'appliquer ce procédé à tout autre exemple. La comparaison des restes successifs doit être poussée jusqu'à ce qu'on en trouve un qui soit contenu un nombre exact de fois dans celui qui le précède, ou qui soit tel, que le reste qu'il pourrait laisser dans cette opération échappe aux sens par sa petitesse. C'est ainsi qu'on parviendra toujours à un résultat au moins approché.

6. Il est évident qu'une droite n'en peut rencontrer une autre qu'en un seul point (3).

7. L'espace indéfini BAC (*fig.* 4) compris entre deux droites qui se coupent en un point A, et que l'on peut concevoir prolongées autant qu'on le voudra, se nomme ***angle***. Quoique cet espace ne soit pas fermé du côté BC, il est néanmoins bien distingué du reste du plan par les limites AB et AC. Deux angles peuvent différer entre eux à cet égard; la droite AD, par exemple, fait évidemment

avec AB un angle plus grand que celui que font entre elles les droites AB et AC.

On désigne ordinairement un angle par trois lettres, en mettant au milieu celle qui occupe le point où les deux lignes se coupent, point qu'on nomme le *sommet* de l'angle. L'angle formé par les droites AB et AC est l'angle BAC. Quand il n'y a qu'un seul angle dans un point, comme en *a* par exemple, on peut ne mettre que la lettre du sommet, et dire l'angle *a*.

8. Deux angles sont égaux lorsqu'étant posés l'un sur l'autre, ils se recouvrent parfaitement. L'angle *bac* sera égal à l'angle BAC si, la droite *ab* étant posée sur AB de manière que le point *a* soit sur le point A, l'autre droite *ac* tombe sur AC. Il n'est pas nécessaire, pour que l'égalité ait lieu, que les longueurs des lignes AB et *ab*, AC et *ac* soient respectivement égales; car on sent parfaitement que si, dans les portions Ab' et Ac' de leurs longueurs, les droites AB et AC se confondent avec les droites *ab* et *ac*, il en sera de même dans tout le reste, lorsqu'on prolongera celles-ci d'une quantité suffisante (2).

9. La position respective de deux droites dépend de l'angle qu'elles font entre elles. Parmi toutes les situations qu'une droite peut avoir à l'égard d'une autre qu'elle rencontre, la plus remarquable est la situation *perpendiculaire*. C'est par ce mot que l'on désigne le cas où une droite AC (*fig.* 5), tombant sur une autre AB, fait avec cette dernière, prolongée en deçà du point A, en AD, deux angles BAC et DAC égaux entre eux, c'est-à-dire qu'alors, si l'on plie la figure le long de la ligne AC, la portion AB de la droite BD doit se coucher sur l'autre portion AD.

Il est évident que, dans ce cas, la droite AC ne penche ni vers D ni vers B.

Les angles BAC et CAD sont nommés *angles droits*.

Tout angle moindre qu'un droit se nomme *angle aigu.* L'angle BAE est un angle aigu.

Tout angle plus grand qu'un droit se nomme *angle obtus.* L'angle BAF est un angle obtus.

Il est visible qu'un angle droit doit en couvrir un autre; que l'angle droit A'B'D' (*fig.* 6), par exemple, étant placé sur l'angle droit ABD, doit le couvrir exactement. En effet, si l'on prend AB = A'B', et qu'on porte ensuite la figure A'C'D' sur ACD, en faisant coïncider les points A' et B' avec les points A et B, les droites AC et A'C' se couvriront parfaitement, puisqu'on n'en peut mener qu'une seule entre deux points donnés; et si la ligne B'D' ne tombait pas alors sur BD, mais prenait une position B*d*, les angles A'B'D', D'B'C', représentés par AB*d*, *d*BC, ne seraient pas égaux et ne seraient, par conséquent, pas droits.

10. On voit, à l'inspection seule de la *fig.* 5, que la somme de tous les angles BAE, EAC, CAF, FAD, qu'on peut faire du même côté d'une droite et autour d'un de ses points pris pour sommet, équivaut toujours à deux droits, en quelque nombre que soient ces angles.

11. Lorsqu'une droite AE tombe sur une autre droite DB prolongée de chaque côté du point de rencontre A, elle fait avec cette autre deux angles EAB et EAD, qui, réunis ensemble, valent deux droits.

Deux droites BD et EF (*fig.* 7) qui se coupent, étant prolongées au delà de leur point de rencontre A, forment autour de ce point quatre angles qui sont opposés par le sommet deux à deux, savoir : EAB à FAD, EAD à FAB.

THÉORÈME.

12. *Les angles opposés par le sommet que forment deux droites en se coupant, sont égaux.*

Démonstration. — En effet, il résulte du numéro précédent, que la somme des angles BAE et DAE, placés du même côté de la droite DB, est égale à deux droits, et que celle des angles DAE et DAF, placés du même côté de la droite EF, est aussi égale à deux droits; ainsi, les angles BAE et DAE réunis équivalent aux angles DAE et DAF réunis. Retranchant de part et d'autre l'angle commun DAE, il restera l'angle BAE égal à l'angle DAF, qui lui est opposé par le sommet.

On démontrerait de même que l'angle DAE est égal à BAF.

13. *Corollaire.* — Il suit de la proposition précédente, que si l'on continue au-dessous de AB (*fig.* 8) la droite AC, qui fait avec DB deux angles droits, CAB et CAD, son prolongement AE fera encore, de l'autre côté de AB, deux angles droits, BAE et DAE, puisque ces angles, étant opposés par le sommet aux angles CAD et CAB, qui sont supposés droits, seront eux-mêmes droits (9).

Il résulte encore de là que CE étant perpendiculaire sur DB, DB, l'est aussi sur CE.

Si maintenant on mène par le point A tant de droites FG, HI, etc., qu'on voudra, il est visible que la somme de tous les angles BAF, FAC, CAH, HAD, DAG, GAE, EAI, IAB, que ces droites feront entre elles, ne composera jamais que quatre angles droits.

14. On ne peut enfermer un espace par un nombre de droites moindre que trois. Cet espace se nomme *triangle*. Les lignes qui le terminent se coupent deux à deux, et forment trois angles : ABC (*fig.* 9) est un triangle dont les côtés sont AB, AC, BC, et les trois angles sont A, B, C.

Les premières propriétés du triangle servent de base à tout ce qui regarde la situation respective des droites : il faut donc les faire connaître avant d'aller plus loin.

15. *Remarques.* — Puisque la ligne droite AB est le plus court chemin pour aller du point A au point B, il

s'ensuit que la somme des deux autres côtés AC et BC du triangle ABC surpasse AB, et l'on verra de même que la somme de deux côtés quelconques d'un triangle surpasse toujours le troisième.

Mais si l'on prend dans l'intérieur d'un triangle ABC un point quelconque E, et qu'on tire les droites AE et EB, la somme de ces droites sera moindre que celle des droites AC et BC qui les enveloppent. En effet, si l'on tire par le point E une droite GF qui coupe en même temps les deux droites AC et BC, on aura

$$GF < GC + CF;$$

d'où il suit que le contour AGFB sera moindre que la somme des droites AC et CB. Par la même raison,

$$AE < AG + GE, \quad EB < EF + FB;$$

donc

$$AE + EB < AG + GE + EF + FB,$$

ou plus petit que le contour AGFB, et, par conséquent, à plus forte raison, plus petit que la somme des droites AC et BC.

On distingue six choses dans un triangle, savoir : trois angles et trois côtés. Il y a entre ces six choses des relations nécessaires qui sont contenues dans les propositions suivantes.

THÉORÈME.

16. ***Lorsque deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun, ces triangles sont égaux dans toutes leurs parties.***

Si l'angle C du triangle ABC (*fig.* 10) est égal à l'angle C′ du triangle A′B′C′, et que les côtés AC et BC, qui comprennent le premier de ces angles, soient respectivement égaux aux côtés A′C′ et B′C′, qui comprennent le second, le triangle ABC sera égal au triangle A′B′C′ dans toutes ses autres parties; c'est-à-dire que l'angle A sera égal à l'angle A', l'angle B à l'angle B', et le côté AB au côté A'B'.

Démonstration. — Si l'on porte le triangle A'C'B' sur le triangle ACB, de manière que le côté A'C' tombe sur AC, en mettant le point C' sur le point C, le point A' se trouvera sur le point A, puisque $A'C' = AC$; de plus, les angles ACB et A'C'B', étant égaux par l'hypothèse, se couvriront exactement, et le côté C'B' tombera, par conséquent, sur le côté CB; enfin, le point B' tombera sur le point B, puisque $C'B' = CB$. La droite A'B', ayant ses deux extrémités sur celles de la droite AB, se confondra avec elle : le triangle A'B'C' couvrira donc exactement le triangle ACB, et lui sera parfaitement égal.

Il est important de remarquer que les côtés égaux, ou ceux qui se confondent lorsque les deux figures sont posées l'une sur l'autre, se trouvent opposés à des angles égaux dans chacun des triangles; ainsi A'B', qui se confond avec AB, est opposé à l'angle C' égal à l'angle C. Il en est de même dans les propositions suivantes.

17. *Corollaire.* — Un triangle est entièrement déterminé par l'un de ses angles et les deux côtés qui le comprennent, puisque, quand deux triangles sont égaux dans ces parties, ils le sont dans toutes les autres. On peut encore se convaincre de cette vérité, en observant que lorsque l'angle C est donné, la situation respective des côtés AC et CB l'est aussi; et si l'on a de plus leur longueur, qui fixe les points A et B, on ne peut joindre ces points que par la seule droite AB, et l'on n'obtient ainsi qu'un seul triangle ABC.

THÉORÈME.

18. *Lorsque deux triangles ont, chacun à chacun, un côté égal adjacent à deux angles égaux, ces triangles sont égaux dans toutes leurs parties.*

Si le côté AB du triangle ABC est égal au côté A'B' du triangle A′B′C′, et que les angles CAB et CBA du premier triangle soient respectivement égaux aux angles C′A′B′ et C′B′A′ du second, ces deux triangles seront égaux en tout.

Démonstration. — Pour reconnaître la vérité de cette proposition, il faut concevoir que le triangle A′B′C′ soit posé sur le triangle ABC, de manière que le côté A′B′ soit placé sur son égal AB, savoir : le point A′ sur le point A, et le point B′ sur le point B. Il suit de l'égalité des angles CAB et C′A′B′, que le côté A′C′ doit tomber dans la direction du côté AC ; de même, les angles CBA et C′B′A′ étant égaux, le côté C′B′ tombera dans la direction de CB, et le point C′, commun aux deux côtés C′A′ et C′B′, se trouvera, par conséquent, sur le point C, commun aux deux côtés CA et CB : les deux triangles se couvriront parfaitement, et seront donc égaux dans toutes leurs parties.

THÉORÈME.

19. *Si les côtés* A′B′ *et* B′C′ *du triangle* A′B′C′ (fig. 11) *sont respectivement égaux aux côtés* AB *et* BC *du triangle* ABC, *et que l'angle* B′, *compris entre les deux premiers, soit moindre que l'angle* B, *compris entre les deux derniers, le côté* A′C′, *opposé à l'angle* B′ *dans le triangle* A′B′C′, *sera moindre que le côté* AC, *opposé à l'angle* B *dans le triangle* ABC.

Démonstration. — En effet, lorsqu'on place le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC, en posant A′B′ sur AB, le point C′ ne peut prendre que les trois positions représentées en C″ dans les n^os^ 1, 2 et 3 de la figure.

Par la première, dans laquelle il tombe sur le côté AC, il est évident que AC″, qui représente A′C′, est moindre que AC.

Par la seconde, qui suppose le point C″ au dedans du triangle ABC, on aurait (15)

$$AC'' + BC'' < AC + BC;$$

d'où il résulterait encore

$$AC'' \quad \text{ou} \quad A'C' < AC,$$

puisque BC'', qui représente B'C', est égal à BC par l'hypothèse.

Enfin, dans la troisième position, le point C'' étant extérieur au triangle ABC, on aurait

$$AC'' < OC'' + OA, \quad BC < OB + OC;$$

d'où l'on conclurait

$$AC'' + BC < OC'' + OA + OB + OC,$$

ce qui revient d'abord à

$$AC'' + BC < AC + BC'',$$

puisque $OC'' + OB = BC''$, $OA + OC = AC$; et retranchant ensuite, de part et d'autre, les lignes égales BC et BC'', il resterait toujours

$$AC'' \quad \text{ou} \quad A'C' < AC.$$

20. *Corollaire.* — Il suit de là que *deux triangles sont égaux dans toutes leurs parties, quand les trois côtés de l'un sont égaux aux trois côtés de l'autre;* car si les côtés AB, AC, BC du triangle ABC (*fig.* 10) sont respectivement égaux aux côtés A'B', A'C' et B'C' du triangle A'B'C', l'angle compris entre deux côtés quelconques du premier sera égal à l'angle compris entre les deux côtés égaux à ceux-ci dans le second. Si, par exemple, l'un des deux angles B et B' était moindre que l'autre, l'un des côtés AC et A'C' serait aussi moindre que l'autre (numéro précédent), ce qui est contre l'hypothèse: donc les triangles ABC et A'B'C' ont en même temps leurs côtés et leurs angles égaux chacun à chacun, et sont, par conséquent, égaux en tout (16 ou 18).

PROBLÈME.

21. *Les trois côtés d'un triangle étant donnés séparément, décrire le triangle.*

Solution. — Soient M, N, P (*fig.* 12) les trois lignes données; ayant pris la première, M, pour former le côté AB, on décrira du point A comme centre, et d'un rayon égal à la seconde, N, un cercle CDC'; puis, du point B comme centre, et d'un rayon égal à la troisième, P, un autre cercle CEC'. Leurs circonférences se couperont en deux points, C et C', situés l'un au-dessus de AB, et l'autre au-dessous. En joignant chacun de ces points avec les extrémités de la ligne AB, on formera deux triangles qui satisferont à la question, puisqu'ils auront leurs côtés respectivement égaux aux trois lignes données.

22. *Remarques* — Si l'on prenait trois lignes au hasard, il pourrait arriver que les circonférences des deux cercles décrits ne se rencontrassent pas. Cette circonstance aurait lieu, 1° dans le cas où P + N serait moindre que M; en effet, il est visible, et on le prouvera d'ailleurs dans la suite, que deux cercles ne peuvent se couper qu'autant que la distance de leurs centres est moindre que la somme de leurs rayons; 2° dans le cas où l'un des cercles embrasserait l'autre, c'est-à-dire où l'on aurait

$$AD > AB + BF, \quad \text{ou} \quad N > M + P.$$

Ces deux cas sont compris dans la condition générale que la somme de deux côtés quelconques d'un triangle est toujours plus grande que le troisième, et qu'on peut simplifier en l'énonçant ainsi :

La somme des deux plus petits côtés d'un triangle est toujours plus grande que le troisième.

En effet, la condition N + P > M doit suffire lorsque N et P sont moindres que M, puisque, dans ce cas, les conditions $N + M > P$ et $P + M > N$ sont nécessairement remplies.

La solution du problème précédent, qui met en état de construire un triangle égal à un autre, en faisant usage des côtés de ce dernier, offre le moyen de faire un angle égal à un autre.

PROBLÈME.

23. *Par un point donné pris sur une ligne donnée, faire un angle qui soit égal à un angle donné.*

Solution. — Soient (*fig.* 13) CAB l'angle donné, A'B' la droite sur laquelle on veut construire le nouvel angle qui doit avoir son sommet en A'; je prends sur les côtés du premier, à partir du sommet, deux distances AB et AC, égales entre elles, et je joins par une droite les points C et B, où elles se terminent. Portant ensuite AB de A' en B', je n'ai plus qu'à décrire sur A'B' un triangle dont les deux côtés A'C' et B'C' soient respectivement égaux à AC et à BC, ce qui se fait en marquant l'une des intersections C' des circonférences des cercles décrits avec les rayons AC et BC, des points A' et B' comme centres (1). Tirant A'C', l'angle C'A'B' sera égal à l'angle CAB, puisque les triangles CAB et C'A'B' sont égaux par construction (21).

PROBLÈME.

24. *Un triangle étant donné, en construire un autre qui lui soit égal, en employant à la construction de cet autre un angle du premier et les deux côtés qui le comprennent.*

Solution. — Si cet angle et ces côtés sont l'angle C et les droites AC et BC du triangle ABC (*fig.* 10), on fera sur la droite A'C' un angle C' égal à C; puis on prendra

(1) Pour simplifier la figure, on n'a point tracé les circonférences entières, comme dans la *fig.* 12, mais seulement les portions voisines de l'intersection cherchée. On en usera toujours ainsi désormais.

sur les côtés A'C' et C'B', à partir du point C', des distances égales à AC et à BC, qui détermineront les points A' et B'; joignant ces points par une droite, on formera le triangle A'C'B' égal au triangle ACB, par le n° 16.

PROBLÈME.

25. *Un triangle étant donné, en construire un autre qui lui soit égal, en employant à la construction de ce dernier un côté du premier et les deux angles adjacents.*

Solution. — AB étant ce côté, A et B les angles adjacents, on prendra sur la droite A'B' une partie égale à AB, aux extrémités de laquelle on fera les angles A' et B', respectivement égaux aux angles A et B. Ayant ainsi la direction des droites A'C' et B'C', en les prolongeant jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en C', on formera le triangle A'B'C' égal au triangle ABC, par le n° 18.

Des lignes perpendiculaires et des obliques.

THÉORÈME.

26. *Les lignes* AC *et* CB (fig. 14), *qui partent d'un point quelconque* C *de la droite* CD, *perpendiculaire sur* AB, *et qui s'écartent également du pied de cette perpendiculaire, c'est-à-dire du point* D *où elles rencontrent la ligne* AD, *sont égales, et celles qui s'en écartent le plus sont les plus longues.*

Démonstration. — Puisqu'on suppose que les distances AD et DB sont égales entre elles, que par la nature de la perpendiculaire, les angles CDA et CDB sont égaux (9), et qu'enfin la ligne CD est commune aux deux triangles ACD et DCB, il s'ensuit que ces triangles ont un angle égal compris entre des côtés égaux chacun à chacun, et sont, par conséquent, égaux (16). Donc BC = AC; donc les lignes AC et BC, qui s'écartent également de la perpendiculaire CD, sont égales entre elles.

Si l'on tire par le point C la droite CE, qui s'écarte plus de CD que ne le fait CA, qu'on prolonge CD au-dessous de AB, d'une quantité $C'D = CD$, et qu'on tire les droites AC' et C'E, on aura (15)

$$CE + C'E > CA + C'A.$$

Mais les triangles CAD et C'AD seront égaux, en vertu du nº 16, puisque les angles ADC et ADC' sont égaux (13), que les côtés CD et C'D sont égaux par construction, et que le côté AD est commun à ces deux triangles; on aura donc

$$CA = C'A.$$

On prouvera de même que $CE = C'E$, et il en résultera

$$2CE > 2CA \quad \text{ou} \quad CE > CA,$$

ce qui montre que les lignes qui s'écartent le plus de la perpendiculaire sont les plus longues.

27. 1er *corollaire*. — Les lignes CA, CB, CE se nomment *obliques*, par rapport à la ligne AB; et l'on dit, en conséquence, que *les obliques qui s'écartent également de la perpendiculaire sont égales, et que celles qui s'en écartent le plus sont les plus longues*. D'où il résulte évidemment que si deux obliques sont égales, elles ne tombent pas du même côté de la perpendiculaire, mais qu'elles s'en écartent également de chaque côté de son pied.

28. 2e *corollaire*. — Il suit de là, 1º que la perpendiculaire CD est la plus courte de toutes les lignes que l'on peut mener du point C sur la droite AB, et est, par conséquent, la mesure naturelle de la distance entre ce point et cette droite;

2º. Qu'elle a tous ses points à égale distance des points A et B; car si l'on prend sur sa direction un point quelconque F, on aura encore

$$AF = BF;$$

3°. Qu'un point quelconque G pris hors de la perpendiculaire est inégalement éloigné des points A et B; car on a

$$BG < BF + FG,$$

d'où

$$BG < AG,$$

puisque

$$BF = AF \quad \text{et} \quad AG = AF + FG;$$

4°. Enfin, que d'un point à une droite on ne saurait tirer trois droites égales.

PROBLÈME.

29. *Mener sur la ligne* AB (fig. 15) *une perpendiculaire qui la partage en deux parties égales.*

Solution. — Des points A et B, pris successivement pour centre, et avec une ouverture de compas plus grande que la moitié de AB, on décrira deux arcs de cercle, CE et CF, qui se couperont en un point C. On fera la même chose au-dessous de AB; et joignant les points C et C', la droite CC' sera la perpendiculaire demandée. En effet, les triangles CBC' et CAC' sont égaux, comme ayant tous leurs côtés égaux chacun à chacun (**20**), puisque $AC = BC$, $AC' = BC'$, et que CC' est commun aux deux triangles : les angles ACD et DCB sont donc égaux entre eux. Les côtés AC et CD, CB et CD qui les comprennent, dans les triangles ACD et DCB, étant respectivement égaux, ces derniers triangles sont égaux par le n° **16** : donc l'angle ADC est égal à l'angle BDC, et, par conséquent, droit; et de plus, à cause de $AD = BD$, le point D est le milieu de AB.

PROBLÈME.

30. *Par un point donné* D (fig. 16), *sur une droite* AB, *élever une perpendiculaire à cette droite.*

Solution. — De part et d'autre du point D de la ligne

AB, par lequel on veut élever la perpendiculaire, on prendra des distances égales, AD et BD; et des points A et B, avec des rayons égaux, on décrira les deux arcs de cercle CE et CF, qui se couperont au point C: ce point étant joint avec le point D, la ligne CD sera perpendiculaire sur AB. En effet, les droites AC et CB étant égales, ainsi que les parties AD et BD, les triangles ACD et BCD, ayant en outre un côté commun, CD, sont égaux, et, par conséquent, aussi les angles ADC, BDC.

PROBLÈME.

31. *Par un point donné* C (fig. 17), *pris hors d'une droite* AB, *abaisser une perpendiculaire sur cette droite.*

Solution. — Du point C comme centre, et d'un rayon pris à volonté, mais cependant plus grand que la plus courte distance du point C à la droite AB, on décrira un arc de cercle qui coupera AB aux points A et B; on prendra ensuite ces points pour centres, et avec le même rayon on décrira deux arcs de cercles qui, se coupant en C′, détermineront un second point de la perpendiculaire demandée CC′. En effet, les points A et B étant, par construction, également éloignés du point C, et également éloignés du point C′, on prouvera, comme dans le nº 29, que les angles ADC et BDC sont droits.

THÉORÈME.

32. *D'un point* C, *pris hors d'une droite* AB, *on ne peut abaisser sur cette droite qu'une seule perpendiculaire* CD.

Démonstration. — Les obliques AC et BC déterminées dans le problème précédent, étant égales, doivent s'écarter également de la perpendiculaire (27), qui ne peut passer, par conséquent, que par le point D, milieu de l'intervalle AB; or, par les points C et D, on ne saurait mener que la seule droite CD, et toutes les obliques qui seront égales deux à deux, quelle que soit d'ailleurs leur longueur, ne pourront rencontrer AB qu'à des distances égales du point D. En effet, si cela n'était pas pour les obliques CE et CF par exemple, et que DF > DE, on pourrait prendre DF′ = DE, et tirer CF′, qui serait égale à CE; il se trouverait alors du même côté de la perpendiculaire CD deux obliques égales, ce qui est impossible (27) : donc l'arc de cercle que l'on décrirait du rayon CE rencontrerait AB en F′, et, par conséquent, la perpendiculaire CD est unique.

Quand le point d'où l'on doit mener la perpendiculaire est pris sur la ligne proposée, le théorème est évident (9).

33. 1^er^ *corollaire.* — Il suit de là que deux droites DE et FG, perpendiculaires à une même droite AB (*fig.* 18) ne se rencontrent point, quelque prolongées qu'on les suppose, soit au-dessus, soit au-dessous de cette droite; car, si elles se rencontraient, on pourrait, du point où elles se coupent, abaisser deux perpendiculaires sur la droite AB, ce qui est absurde.

34. 2^e^ *corollaire.* — Il suit encore de la même proposition : 1°. Que deux triangles ABC, A′B′C′ (*fig.* 19) qui ont chacun un angle droit, l'un en A, l'autre en A′, sont égaux lorsque leurs côtés BC et B′C′, respectivement opposés aux angles droits, ainsi qu'un de leurs autres angles, B et B′ par exemple, sont égaux.

En effet, si l'on porte le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC, en plaçant l'angle B′ sur l'angle B, le côté B′C′ couvrira exactement son correspondant BC; le côté A′B′ tombera dans la direction de AB; et si le côté A′C′, dont l'extrémité C′ se trouve sur le point C, ne s'appliquait pas exactement sur AC, il s'ensuivrait que l'on pourrait abaisser du point C deux perpendiculaires sur AB, confondue maintenant avec A′B′, quant à sa direction.

2°. L'égalité des mêmes triangles aurait encore lieu, si les côtés AC et BC étaient respectivement égaux aux côtés A′C′ et B′C′; car, en posant un de ces triangles sur l'autre, de manière que A′C′ fût sur AC, le côté A′B′ tomberait sur AB, parce que les angles BAC et B′A′C′ sont égaux comme droits; alors les côtés BC et B′C′ devenant des obliques égales, placées d'un même côté de la perpendiculaire AC, s'en écarteraient également, et tomberaient, par conséquent, l'un sur l'autre.

35. *Remarques.* — Le premier des cas d'égalité, démontré ci-dessus par rapport aux triangles qui ont un angle droit, a lieu également par rapport aux triangles quelconques, qui sont égaux dès qu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun, et un côté égal opposé au même angle dans l'un et dans l'autre; mais ce cas n'est pas nécessaire pour ce qui suit, et il résulte d'ailleurs d'une proposition démontrée plus loin (51).

Il n'en est pas de même du second. Si, dans les triangles ABC et A′B′C′ (*fig.* 20), on a $A = A'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, que l'angle A soit aigu, et que AC surpasse CB, on n'en pourra pas conclure que ces triangles soient égaux; car, ayant abaissé, dans le triangle A′B′C′, la perpendiculaire C′D′, on trouvera de chaque côté de cette perpendiculaire deux obliques C′B′ et C′B″, égales entre elles. Les triangles C′A′B′ et C′A′B″, entre lesquels l'angle A′ et le côté A′C′ sont communs, rempliront donc les conditions données; mais il n'y en a qu'un qui soit égal au triangle ABC, celui dans lequel l'angle B′ est de même espèce que l'angle B, c'est-à-dire aigu, dans le cas de la figure. Il est d'ailleurs visible que l'angle C′B″A′ est obtus, puisqu'il repose sur la même droite que l'angle $C'B''B' = C'B'B''$.

THÉORÈME.

36. *Lorsque deux côtés d'un triangle sont égaux, les angles opposés à ces côtés sont égaux; et lorsqu'ils sont*

inégaux, le plus grand des deux est opposé au plus grand angle.

Démonstration. — Si, dans le triangle ABC (*fig.* 21), les côtés AB et BC sont égaux entre eux, la perpendiculaire abaissée du point B sur le côté AC, passant par le milieu D de ce côté (32), partagera le triangle ABC en deux autres, qui seront égaux entre eux (16), puisque l'angle droit BDA de l'un sera compris entre les côtés AD et BD, respectivement égaux aux côtés DC et BD, qui comprennent l'angle droit BDC de l'autre : l'angle A sera donc égal à l'angle C.

A l'égard du triangle ACE, dans lequel les côtés AE et EC sont inégaux, il est évident que le point E, où se coupent ces deux côtés, doit tomber hors de la perpendiculaire BD, vers celle des extrémités de AC dont il est le plus près (28), et, par conséquent, dans l'angle FDC. Cela posé, en tirant BC, on formera le triangle ABC, dont les angles BCA et BAC seront égaux, d'après ce qui précède, puisque les côtés opposés AB et BC le seront comme des obliques qui s'écartent également de la perpendiculaire; mais, l'angle BCA étant intérieur à l'angle ECA, il s'ensuit que ce dernier, opposé au côté AE, surpasse l'angle EAC, opposé au côté EC plus petit que AE.

37. *Corollaire.* — Il suit de là que si deux angles d'un triangle sont égaux entre eux, les côtés opposés à ces angles sont égaux entre eux; car, s'ils étaient inégaux, l'angle opposé au plus grand des deux serait plus grand que l'autre angle, ce qui est contre l'hypothèse.

Les mêmes raisonnements prouvent aussi que quand deux angles sont inégaux, le plus grand des deux côtés est celui qui est opposé au plus grand des deux angles, puisque l'inégalité des angles entraîne celle des côtés, et que quand deux côtés sont inégaux, l'angle opposé au plus grand côté est toujours le plus grand.

Enfin, quand les trois côtés d'un triangle sont égaux, les trois angles sont égaux, et réciproquement.

38. Les triangles dont les côtés sont inégaux se nomment *scalènes;* ceux qui ont deux côtés égaux se nomment *isocèles;* et ceux dont les trois côtés sont égaux se nomment *équilatéraux*.

Des lignes parallèles.

39. Deux droites qui, quoique situées dans le même plan, ne se rencontrent pas, sont dites *parallèles* entre elles.

Deux droites, DE et FG (*fig.* 18), perpendiculaires à une même droite AB, sont donc parallèles entre elles (33).

40. *Remarque.* — Tout ce qu'on va lire repose sur la vérité des propositions suivantes, dont l'évidence semble tenir immédiatement à la notion que nous avons de la ligne droite : 1° Si, par le point D (*fig.* 22), on mène une droite HH′, qui fasse avec la ligne DB un angle HDB, moindre que le droit EDB, ou qui soit inclinée vers la partie FG de la droite GG′ perpendiculaire sur AB, elle rencontrera GG′ lorsqu'elles seront suffisamment prolongées l'une et l'autre au-dessus de AB. 2° Si, par le même point D, on mène la droite II′, qui fasse, avec DB, l'angle IDB plus grand que le droit EDB, comme elle fera au-dessous de AB, l'angle I′DB moindre que le droit E′DB, elle inclinera vers la partie FG′ de la droite GG′ et rencontrera, par conséquent, cette droite prolongée suffisamment au-dessous de AB.

De là résulte cette proposition, l'un des fondements de la théorie des parallèles : *Une droite qui est perpendiculaire à une autre est rencontrée par toutes celles qui sont obliques sur cette autre; et il n'y a, par conséquent, sur un plan, que les droites perpendiculaires à une* *même ligne qui ne se rencontrent pas ou qui soient parallèles entre elles* (1).

---

(1) C'est dans la difficulté de prouver immédiatement cette proposition que réside l'imperfection de la théorie des parallèles. Beaucoup d'auteurs ont fait, pour en venir à bout, des efforts inutiles, et d'autres, comme Bezout, ont dissimulé le vice du raisonnement, ce qui me semble contraire au devoir rigoureux que s'impose tout auteur d'ouvrages élémentaires, de ne donner jamais que des notions exactes, et surtout d'en faire connaître avec soin l'origine. J'ai jugé convenable de mettre en évidence ce point délicat en formant, à l'exemple d'Euclide, une *demande,* mais que je crois plus aisé à accorder que la sienne, parce qu'elle présente la difficulté réduite à ses moindres termes. (*Voyez,* dans les *Essais sur l'Enseignement,* le paragraphe des *Éléments de Géométrie.*)

Plusieurs géomètres ont essayé de prouver la vérité de cette demande, soit directement, soit en transposant la difficulté; presque tous sont tombés dans de très-grandes longueurs ou dans l'inconvénient de compliquer, par des raisonnements obscurs, des propositions dont la preuve directe est extrêmement simple. On doit cependant excepter de ce reproche la démonstration donnée par Bertrand, de Genève; elle m'a paru la plus simple et la plus ingénieuse de toutes celles que je connais. En voici le fond.

Il est d'abord évident que si l'on ajoute un angle quelconque *edh* un nombre suffisant de fois à lui-même, comme le montre la *fig.* 23, en hdh', $h'dh''$, $h''dh'''$, $h'''dh''''$, on parviendra toujours à former un angle total edh'''' plus grand que l'angle droit *edb*; mais si l'on élève sur la droite DB les perpendiculaires DE et FG, prolongées indéfiniment, on formera une bande indéfinie EDFG, qui ne saurait remplir l'angle droit EDB, quelque nombre de fois qu'elle soit ajoutée à elle-même. En effet, si l'on prend FK = DF, et qu'on élève KL perpendiculaire sur AB, que l'on plie ensuite la figure le long de FG, la bande EDFG couvrira exactement la bande GFKL; car les angles GFD, GFK étant droits, la partie DF tombera sur FK; et comme DF = FK par construction, le point D se placera sur le point K; de plus, l'angle FKL étant droit aussi bien que EDF, la ligne DE se placera sur KL. Cela posé, puisqu'on peut prendre sur la droite indéfinie DB autant qu'on voudra de parties égales à DF, sans arriver à son terme, on formera un nombre aussi grand qu'on voudra de bandes égales à EDFG, sans pouvoir couvrir l'espace indéfini compris entre les deux côtés de l'angle droit EDB. Il suit de là que, considérées relativement à leurs limites latérales, la surface de l'angle *edh* est plus grande que celle de la bande EDFG. Si donc on construit dans cette bande, sur la droite ED, un angle EDH égal à *edh*, il ne pourra demeurer contenu entre les lignes ED et FG : son côté DH coupera nécessairement la droite FG.

Pour sentir la force de cette démonstration, il faut bien concevoir que, lorsqu'on applique l'angle droit *edb* sur l'angle droit EDB, ces deux sur-

THÉORÈME.

41. *Lorsque deux droites* DE *et* FG (fig. 24) *sont parallèles, toutes les droites, telles que* LM, *qui sont perpendiculaires sur l'une, le sont en même temps sur l'autre.*

Démonstration. — Supposons que cela n'ait pas lieu, et que LM, perpendiculaire en M sur FG, ne le soit pas en L sur DE; on pourrait élever alors par le point L sur LM une perpendiculaire qui serait différente de EL, et à laquelle EL serait intérieure ou extérieure, par rapport à FG. D'après la proposition du n° 40, EL devrait donc rencontrer GM, ce qui ne saurait arriver, puisque les droites DE et FG sont parallèles : on ne peut donc pas élever sur LM, par le point L, une perpendiculaire différente de EL. Ainsi, LM est perpendiculaire à la fois sur DE et sur FG.

42. *Corollaire.* — Il suit du théorème précédent, que deux droites parallèles à une troisième sont aussi parallèles entre elles. En effet, toute ligne perpendiculaire sur celle-ci le sera aussi sur les deux premières, qui, se trouvant par là perpendiculaires à une même droite, ne pourront se rencontrer, et seront, par conséquent, parallèles entre elles.

---

faces doivent toujours coïncider entre leurs limites latérales *de* et *db*, DE et DB, quelque loin qu'on les prolonge: alors on verra que, si les angles construits dans les bandes n'en sortaient pas, ils laisseraient un vide indéfini après la dernière bande, et un autre dans chaque bande; mais celui-ci, qui a toujours lieu près de leur sommet, est plus que compensé par les espaces qui leur deviennent communs quand ils sont sortis des bandes, parce que leurs côtés se croisant, ils se recouvrent en partie : tel est l'espace MNO, commun aux angles EDH, GFH'. Avec cette explication, il ne doit rester, à ce que je crois, aucun doute fondé sur ce que l'infini entre dans les considérations précédentes; car il ne s'agit que de concevoir qu'il est toujours possible de placer dans l'angle droit un nombre de bandes qui surpasse un nombre donné, quelque grand que soit ce dernier.

THÉORÈME.

43. *Lorsque deux droites* DE *et* FG, *parallèles entre elles* (fig. 25), *sont coupées par une droite quelconque* IH, *les angles* ELI *et* GMI, *qu'elles font avec cette dernière, d'un même côté, l'un en dedans, l'autre en dehors, sont égaux entre eux.*

Démonstration. — Si du point K, au milieu de LM, on abaisse sur l'une des droites DE, FG, la perpendiculaire DF, cette ligne sera en même temps perpendiculaire sur l'autre (41). Les triangles DLK, KFM seront égaux (34), parce que les côtés LK et KM, respectivement opposés aux angles droits D et F, sont égaux par construction, et que, de plus, les angles DKL et MKF le sont aussi, comme étant opposés par le sommet : donc l'angle DLK ou ELI est égal à KMF, et, par conséquent, à GMI, opposé par le sommet à ce dernier.

THÉORÈME.

44. *Si deux droites* DE *et* FG *font avec une troisième* IH, *et du même côté, par rapport à celle-ci, des angles égaux,* ELI, GMI, *l'un en dedans, l'autre en dehors, ces deux droites seront parallèles entre elles.*

Démonstration. — Si du point K, milieu de LM, on abaisse sur DE la perpendiculaire DF, on formera les triangles DLK et MKF, égaux entre eux (18), parce que, d'après l'hypothèse, l'angle DLK ou ELI est égal à l'angle KMF, opposé par le sommet à GMI ; l'angle DKL est égal à MKF, comme opposé par le sommet ; et, enfin, le côté LK est égal à KM, par construction. L'angle KFM sera donc égal à LDK, et droit par conséquent. Ainsi, les deux droites DE et FG, étant perpendiculaires l'une et l'autre à la même droite DF, seront parallèles entre elles.

45. *Remarques.* — Le fréquent usage que l'on fait des propriétés des parallèles a porté les géomètres à désigner par des noms particuliers les différents angles qu'elles forment avec les droites qui les coupent, droites que, pour cette raison, on appelle *sécantes*.

Les angles tels que ELI, GMI (*fig.* 26), situés du même côté de la sécante IH, et dont l'ouverture est tournée du même côté, se nomment *angles correspondants*.

Les angles DLM, FMI sont aussi des angles correspondants.

Tous les angles dont l'ouverture est entre les parallèles sont compris dans la dénomination générale d'*angles internes,* et tous ceux dont l'ouverture est en dehors s'appellent *angles externes*.

On distingue ensuite ces mêmes angles par leur position relativement à la *sécante*. Ceux qui sont du même côté, par rapport à cette droite, sont des *angles internes* ou des *angles externes du même côté.*

ELM, GML sont deux angles internes du même côté.

HLD, IMF sont deux angles externes du même côté.

Les angles qui sont dans une situation opposée, tant par rapport à la sécante que par rapport aux parallèles, se nomment *angles alternes*. Il y a des angles *alternes-internes,* comme ELM et FML, ou DLM et GML; et des *angles alternes-externes,* comme HLD et GMI, ou HLE et FMI.

THÉORÈME.

46. *Lorsque deux parallèles* DE *et* FG *sont coupées par une troisième ligne* IH,

1°. *Les angles correspondants sont égaux;*

2°. *Les angles alternes-internes sont égaux;*

3°. *Les angles alternes-externes sont égaux;*

4°. *Les angles internes du même côté, réunis, forment deux angles droits;*

5°. *Les angles externes du même côté, réunis, forment deux angles droits.*

Réciproquement, *si l'une quelconque de ces propriétés a lieu, les droites* DE *et* FG *sont nécessairement parallèles.*

Démonstration. — 1°. L'égalité des *angles correspondants* n'est autre chose que le théorème du n° 43, puisque les angles ELI et GMI (*fig.* 25) sont évidemment des *angles correspondants*, d'après le sens attaché à ce mot. L'égalité de ces deux-là étant prouvée, celle de tous les autres angles correspondants s'en déduit sur-le-champ. Pour les angles DLM et FMI par exemple (*fig.* 26), on remarquera que la somme des angles DLM et ELI, qui reposent sur la même droite DE, est égale à deux droits (11); que, par la même raison, la somme des angles FMI et GMI est aussi égale à deux droits. Retranchant de ces sommes égales les angles égaux ELI et GMI, les angles restants DLM et FMI seront nécessairement égaux.

2°. L'égalité des *angles alternes-internes*, celle de ELI, FMH par exemple, a lieu, parce que FMH est égal à GMI, son opposé par le sommet, et que celui-ci est égal à ELI, comme correspondant: les deux angles ELI et FMH étant égaux à un troisième GMI, sont donc aussi égaux entre eux. En raisonnant d'une manière semblable, on reconnaîtrait l'égalité des angles DLI et GMH.

3°. L'égalité des *angles alternes-externes*, celle de DLH et GMI par exemple, a lieu, parce que GMI étant opposé par le sommet à FMH lui est égal, et que ce dernier angle est égal à DLH, comme correspondant: les deux angles DLH et GMI étant donc égaux à un troisième FMH, sont égaux entre eux. C'est ainsi qu'on démontrerait l'égalité des deux angles ELH, FMI.

4°. Les *angles internes du même côté*, ELI, GMH par exemple, pris ensemble, valent deux droits, parce que ELI et GMI sont égaux comme correspondants, et que la somme des angles GMI et GMH, qui reposent sur la même droite HI, étant égale à deux droits (11), si l'on substitue à GMI son égal ELI, la somme des angles ELI et GMH demeurera la même que celle des angles GMI et GMH, et sera, par conséquent, égale à deux droits.

5°. Les *angles externes du même côté,* ELH et GMI par exemple, pris ensemble, valent deux droits, parce que les angles GMI et ELM sont égaux comme correspondants, et que la somme des angles ELM et ELH, qui reposent sur la même droite IH, étant égale à deux droits (11), si l'on substitue à l'angle ELM son égal GMI, la somme des angles GMI et ELH sera la même que la précédente, et, par conséquent, encore égale à deux angles droits.

Réciproquement, si l'une quelconque de ces propriétés a lieu, les droites DE et FG sont parallèles, parce que si c'est l'égalité des angles correspondants que l'on remarque d'abord, il suit du n° 44 que cette égalité entraîne nécessairement le parallélisme; et quant aux quatre autres propriétés, il suffit d'observer que l'on conclut de chacune d'elles l'égalité des angles correspondants.

En effet, les angles alternes-internes ELI et FMH ne peuvent être égaux sans que l'angle GMI, égal à FMH, comme son opposé par le sommet, ne le soit, par conséquent, à ELI : donc, dans ce cas, les angles correspondants ELI et GMI sont égaux.

Il en est de même des angles alternes-externes ELH et FMI, puisque FMI et GMH étant égaux comme opposés par le sommet, GMH se trouve égal aussi à son correspondant ELH.

Quand on sait que la somme des angles internes ou externes du même côté est égale à deux droits, on s'assure, ainsi qu'il suit, que les angles correspondants sont égaux. Si, par exemple, la somme des angles ELI et GMH est égale à deux droits, l'angle ELI sera égal à deux angles droits, moins l'angle GMH; mais parce que les deux angles GMH et GMI, qui reposent sur une même droite, valent ensemble deux droits, l'angle GMI sera aussi égal à deux angles droits, moins l'angle GMH, et, par conséquent, égal à son correspondant ELI, qui a la même valeur. On raisonnerait de la même manière pour les angles externes du même côté.

47. *Corollaire.* — Puisque deux lignes parallèles jouissent toujours des propriétés précédentes, et que, lorsque ces propriétés ont lieu par rapport à deux droites, celles-ci sont parallèles, il s'ensuit que les droites pour lesquelles ces propriétés n'ont pas lieu ne sont point parallèles.

Par exemple, deux droites DE et FG (*fig.* 27), perpendiculaires à deux droites AB et BC, qui se coupent, ne sont point parallèles; car, si l'on tire la sécante IH, il est visible que la somme des angles EIH et GHI, intérieurs du même côté, est moindre que celle des deux angles droits EIB, GHB.

PROBLÈME.

48. *Par un point donné* C (fig. 28), *mener une droite parallèle à la droite donnée* AB.

Solution. — Par le point C, on mènera une droite quelconque CB rencontrant AB; puis on fera au point C, sur CB, l'angle BCD égal à l'angle ABC (23); la droite CD, obtenue par ce procédé, sera la parallèle demandée, puisqu'elle passera par le point C, et qu'en considérant CB comme sécante, les angles alternes-internes ABC et BCD seront égaux par construction.

PROBLÈME.

49. *Par un point donné* C, *pris hors d'une droite* AB (fig. 29), *mener une droite qui fasse avec la première un angle égal à un angle donné* A'.

Solution. — Par un point quelconque A de la droite AB, on fera l'angle DAB égal à l'angle A' (23), et menant par le point C, parallèlement à AD (numéro précédent), la droite CE, elle fera avec AB un angle CEB égal à DAB (47), et, par conséquent, à l'angle donné A′.

THÉORÈME.

50. *Les angles* ABC, DEF (fig. 30), *qui ont les côtés parallèles et l'ouverture placée dans le même sens, sont égaux.*

Démonstration. — Si l'on prolonge un côté quelconque du second angle, DE par exemple, jusqu'à ce qu'il rencontre un de ceux du premier, en considérant les parallèles EF et CH, par rapport à la sécante DH, on reconnaîtra que les angles DEF et DHC sont égaux comme correspondants (47); puis, en considérant les parallèles AB et DH, par rapport à la sécante BC, on reconnaîtra que les angles ABC et DHC sont égaux comme correspondants : les deux angles DEF et ABC, étant égaux à un troisième DHC, seront, par conséquent, égaux entre eux.

THÉORÈME.

51. *Les trois angles d'un triangle réunis valent toujours deux angles droits.*

Démonstration.— Si l'on mène par l'angle A du triangle quelconque ABC (*fig.* 31) une droite AD parallèle au côté opposé BC, les angles ABC et EAD, formés sur la sécante AB, seront égaux comme correspondants (47); les angles DAC et ACB, alternes-internes par rapport à la sécante AC, seront aussi égaux (47) : donc l'angle EAC, composé des angles EAD et DAC, sera égal à la somme des angles ABC et ACB du triangle proposé; et en joignant à l'angle EAC le troisième angle CAB, on aura, autour du point A et sur la droite EB, trois angles, EAD, DAC, CAB, équivalents à ceux du triangle ABC, et égaux à deux droits (10).

N. B. — Il peut être utile de se rappeler que l'angle EAC se nomme *angle extérieur* du triangle ABC, et qu'il vaut à lui seul les deux intérieurs opposés ABC, ACB.

52. *Corollaire.* — Il suit du théorème ci-dessus, que quand deux angles d'un triangle sont respectivement égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisième angle de l'un est aussi égal au troisième angle de l'autre, puisque ce dernier angle, réuni aux deux premiers dans chaque triangle, compose, de part et d'autre, une somme égale.

On voit encore par là qu'un triangle ne peut avoir qu'un seul angle droit, et, à plus forte raison, qu'un seul angle obtus.

53. On nomme triangle *rectangle* celui qui a un angle droit; *acutangle* celui qui n'a que des angles aigus; *obtusangle* celui qui a un angle obtus; et les deux dernières espèces sont comprises sous la dénomination générale de triangles *obliquangles*.

Il est visible que, dans le triangle équilatéral, dont tous les angles sont égaux (37), chaque angle est les deux tiers d'un droit.

THEORÈME.

54. *Les parties* AC *et* BD (fig. 32) *de deux droites parallèles, interceptées entre deux droites parallèles, sont égales entre elles, et réciproquement.*

Démonstration. — Si l'on tire la droite AD, on formera deux triangles ABD et ACD, qui seront égaux; car, en prenant AD pour sécante des parallèles AB et CD, on verra que les angles BAD et ADC sont égaux comme alternes-internes (47); regardant ensuite la même droite comme sécante des parallèles AC et BD, on reconnaîtra que les angles ADB et DAC sont égaux par la même raison : de plus, le côté AD étant commun aux deux triangles ABD et ACD, ces triangles seront égaux (18); les côtés AC et BD, opposés à des angles égaux ADC et BAD, seront donc égaux, ce qui fait le sujet de la proposition. Il en sera de même des côtés AB et CD.

Réciproquement, si les parties CD et AB sont égales, ainsi que les parties AC, BD, les triangles ACD et ABD auront leurs côtés égaux chacun à chacun, et seront, par conséquent, égaux. L'égalité des angles CAD, ADB, alternes-internes, établira le parallélisme des droites AC, BD (47), et l'égalité des angles BAD, CDA celui des droites AB, CD.

On prouverait, sans plus de difficulté, que les droites CD et AB sont égales et parallèles, dès que les droites AC et BD sont égales et parallèles entre elles.

55. *Corollaire.* — La proposition précédente ne cesserait pas d'être vraie, quand même les droites AC et BD seraient perpendiculaires sur AB et CD, puisqu'elles seraient toujours parallèles entre elles; mais alors les parties AC et BD mesurant la distance des deux droites AB et CD, il s'ensuit que deux parallèles sont partout également éloignées l'une de l'autre.

Des lignes proportionnelles et des triangles semblables.

THÉORÈME.

56. *Si deux droites quelconques* AF *et* GM (fig. 33) *sont coupées par un nombre quelconque de parallèles,* AG, BH, CI, *etc., menées par des points pris à des distances égales sur la première, les parties* GH, HI, IK, *etc., de la seconde seront aussi égales entre elles.*

Démonstration. — En menant par les points G, H, I, etc., les droites GN, HO, IP, etc., parallèles à AF, on forme les triangles GNH, HOI, IPK, etc., dans lesquels les côtés NG, OH, IP, etc., étant respectivement égaux à AB, BC, CD, etc., comme parallèles comprises entre parallèles (54), sont égaux entre eux. Les angles NGH, OHI, PIK, etc., sont égaux comme correspondants, par rapport à la sécante GM; et enfin les angles GNH, HOI, IPK, etc., sont égaux, parce qu'ils ont les côtés parallèles et l'ouverture placée dans le même sens (50). Ces triangles ayant donc, chacun à chacun, un côté égal, adjacent à deux angles égaux, sont égaux (18); d'où il suit que les côtés GH, HI, IK, etc., le sont aussi.

57. *Corollaire.* — Il suit de ce qui précède, que AB est contenu dans AF, autant que GH l'est dans GM; en sorte qu'on a cette proportion,

AB : AF :: GH : GM,

que l'on peut changer en cette autre,

AB : GH :: AF : GM;

et de cette dernière on tire

2AB : 2GH :: AF : GM,
3AB : 3GH :: AF : GM,
etc.,

c'est-à-dire qu'un nombre quelconque de parties de AF est à un pareil nombre de parties de GM comme la droite entière AF est à la droite entière GM.

THÉORÈME.

58. *Trois parallèles,* AG, DK, FM (fig. 34), *coupent toujours deux droites quelconques,* AF *et* GM, *en parties proportionnelles, ou de manière qu'on a*

AD : DF :: GK : KM.

Démonstration.— Il peut arriver deux cas: 1°. Que AD soit commensurable avec AF, c'est-à-dire que le rapport de AD avec AF puisse s'exprimer exactement par deux nombres. Je suppose, par exemple, qu'on ait

AF : AD :: 47 : 25;

si l'on conçoit la droite AF divisée en 47 parties égales, AD en contiendra 25, et DF 22. Menant ensuite par toutes les divisions des parallèles à FM, la droite GM se trouvera divisée en 47 parties égales, dont 25 composeront GK, et 22 composeront KM; on aura donc

$$\text{AD} : \text{DF} :: 25 : 22,$$
$$\text{GK} : \text{KM} :: 25 : 22;$$

d'où il suit

$$\text{AD} : \text{DF} :: \text{GK} : \text{KM}.$$

De plus, à cause des proportions

$$\text{AF} : \text{AD} :: 47 : 25,$$
$$\text{GM} : \text{GK} :: 47 : 25,$$

on obtiendra encore

$$\text{AF} : \text{AD} :: \text{GM} : \text{GK}.$$

2°. Si AF et AD sont incommensurables, on prouvera, ainsi qu'il suit, que leur rapport ne peut être ni plus petit ni plus grand que celui de GM à GK.

Soit d'abord

$$\text{AF} : \text{AD} :: \text{GM} : \text{GI},$$

GI étant plus petit que GK. On peut toujours diviser le côté AF en parties assez petites pour qu'en menant par tous les points de division des parallèles à FM, il en passe une, *de*, entre les points I et K; on aura, d'après ce qui précède, à cause de la commensurabilité de AF à A*d*,

$$\text{AF} : \text{A}d :: \text{GM} : \text{G}e.$$

Les antécédents de cette proportion étant les mêmes que ceux de la précédente, on en conclura cette nouvelle proportion entre les conséquents de l'une et de l'autre:

$$\text{AD} : \text{A}d :: \text{GI} : \text{G}e,$$

résultat absurde, puisque AD étant plus grand que A*d*, GI est plus petit que G*e*.

On ne peut pas avoir non plus

$$\text{AF} : \text{AD} :: \text{GM} : \text{GI}',$$

GI′ étant plus grand que GK; car ayant divisé AF de manière qu'une des parallèles $d'e'$ tombe entre les points K et I′, on aura

$$AF : Ad' :: GM : Ge'.$$

Faisant une nouvelle proportion entre les conséquents de cette dernière et ceux de la précédente, on aura

$$AD : Ad' :: GI' : Ge',$$

résultat encore absurde, puisque AD étant plus petit que Ad', GI′ est plus grand que Ge' : il faut donc nécessairement que le quatrième terme de la proportion formée des droites AF, AD, GN soit GK.

On tire de la proportion AF : AD :: GM : GK,

$$AF - AD : AD :: GM - GK : GK,$$

ou

$$DF : AD :: KM : GK,$$

ou enfin

$$AD : DF :: GK : KM,$$

en renversant les deux rapports (1).

59. 1[er] *corollaire.* — Si par le point G on tire la droite GN parallèle à AF, on aura (54)

$$GO = AD, \quad ON = DF;$$

---

(1) On éprouvera peut-être quelque difficulté à transporter aux parties de l'étendue la notion de rapport, telle qu'on la conçoit à l'égard des nombres, surtout lorsqu'il s'agira de lignes incommensurables entre elles; mais l'obscurité disparaîtra, si l'on fait attention qu'on ne peut comparer deux lignes qu'en les supposant rapportées à une commune mesure (5), et qu'alors leur rapport est exprimé par celui des nombres de mesures communes comprises dans chaque droite. Quoique ce dernier cesse d'être rigoureusement assignable quand les lignes n'ont pas de mesure commune, il n'en existe pas moins, puisqu'on peut en approcher d'aussi près qu'on voudra; et deux rapports incommensurables devront être regardés comme égaux, dès qu'on prouvera que, quelque loin que soit poussée l'approximation pour l'un et pour l'autre, leur différence demeurera toujours nulle.

et, par ce qui précède,

GO : ON :: GK : KM,
GO : GN :: GK : GM.

Si donc on mène dans un triangle une droite OK, parallèle à l'un des côtés NM, les deux autres côtés GN et GM seront coupés en parties proportionnelles par cette droite.

60. 2e *corollaire*. — Réciproquement, lorsqu'une droite coupe deux côtés d'un triangle en parties proportionnelles, elle est parallèle au troisième.

En effet, si dans le triangle ABC (*fig.* 35) on avait

AB : A*e* :: AC : A*f*,

et que la ligne *ef* ne fût pas parallèle à BC, on pourrait mener, par le point *e*, une droite *e*H parallèle à BC, et qui donnerait (59)

AB : A*e* :: AC : AH,

proportion dont les trois premiers termes sont les mêmes que ceux de la précédente : il s'ensuit donc que AH = A*f*; que, par conséquent, les droites *ef* et *e*H se confondent, et que la première est nécessairement parallèle à BC.

61. 3e *corollaire*. — La droite BD (*fig.* 36), qui divise en deux parties égales l'un des angles B d'un triangle quelconque ABC, partage le côté opposé AC en deux segments proportionnels aux côtés adjacents, c'est-à-dire que l'on a cette proportion :

AD : DC :: AB : BC.

Cela se prouve en menant CE parallèle à BD, et qui rencontre en E, AB prolongé. Il en résulte, par le n° 59,

AD : DC :: AB : BE;

de plus, le triangle CBE est isocèle; car l'angle BCE est égal à CBD, comme alterne-interne par rapport à la sécante BC, l'angle BEC l'est à l'angle ABD, comme correspondant par rapport à la sécante AE, et les angles ABD et CBD sont égaux comme moitiés du même angle ABC : donc les angles BCE et BEC le sont aussi; donc BE est égal à BC (37); donc, enfin,

AD : DC :: AB : BC.

PROBLÈME.

62. *Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données* M, N, P (fig. 37), *ou le quatrième terme de cette proportion :*

M : N :: P : x.

Solution. — On tirera deux droites indéfinies AB et AC, faisant entre elles un angle quelconque; on prendra sur la première, de A en B, une distance AB égale à M, et de A en D une distance égale à N; puis on portera sur la seconde, de A en C, la troisième droite P. On joindra par une droite les points B et C, et tirant par le point D, parallèlement à BC, la droite DE, on aura dans AE la quatrième proportionnelle demandée, puisque (59)

AB : AD :: AC : AE,

ce qui donne

M : N :: P : AE.

Si les deux droites N et P étaient égales entre elles, la ligne déterminée par la proportion

M : N :: N : x

serait ce que les géomètres ont appelé *troisième proportionnelle*. La construction de ce cas ne diffère pas de celle du précédent; le point C tombe alors en c, et la droite De, parallèle à Bc, coupe sur AC la partie Ae, égale à la troisième proportionnelle cherchée, puisqu'on a

AB : AD :: Ac : Ae,

ou

M : N :: N : Ae.

63. Deux triangles sont *semblables,* lorsque les angles de l'un sont respectivement égaux aux angles de l'autre, et que les côtés qui, dans l'un et dans l'autre, sont opposés à des angles égaux, et que, pour cette raison, on nomme *côtés homologues,* sont proportionnels.

Ces deux conditions sont liées entre elles de manière que l'une entraîne toujours l'autre.

THÉORÈME.

64. *Lorsque deux triangles* ABC *et* DEF (fig. 38) *ont leurs angles égaux chacun à chacun, leurs côtés homologues sont proportionnels, et ils sont, par conséquent, semblables.*

Démonstration. — Si l'on prend sur AB et AC deux parties Ae et Af, respectivement égales à DE et à DF, et qu'on tire ef, les triangles Aef et DEF seront égaux, puisque, par l'hypothèse, l'angle A de l'un est égal à l'angle D de l'autre, et que les côtés de Ae et Af sont égaux à DE et à DF, par construction (16). L'angle Aef étant égal à E, le sera, par conséquent, à B, et ef sera parallèle à BC : on aura donc la proportion (59)

$$Ae : AB :: Af : AC,$$

ou

$$DE : AB :: DF : AC.$$

Tirant ensuite Gf parallèlement à AB, on obtiendra

$$Af : AC :: BG : BC,$$

ou

$$DF : AC :: EF : BC,$$

puisque BG est égal à ef (54), qui l'est à EF. Réunissant cette dernière proportion avec la première, par le moyen du rapport DF : AC, qui est commun à l'une et à l'autre, on aura cette suite de rapports égaux :

$$DE : AB :: DF : AC :: EF : BC,$$

de laquelle il résulte que les côtés homologues des triangles ABC, DEF, sont proportionnels entre eux.

65. *Corollaire.* — Il suit de la proposition précédente que deux triangles sont semblables : 1°. Lorsqu'ils ont seulement deux angles égaux chacun à chacun, puisque le troisième angle de l'un est nécessairement égal au troisième angle de l'autre (52) ;

2°. Lorsque leurs côtés sont respectivement parallèles ;

3°. Lorsque leurs côtés sont respectivement perpendiculaires.

La seconde partie est évidente pour les triangles placés comme ABC et DEF ; car les angles tels que A et D, qui ont leur ouverture placée dans le même sens, son égaux (50).

A l'égard des triangles placés dans une situation renversée, comme le montre la *fig.* 39, si l'on prolonge le côté EF du triangle DEF, de manière qu'il en coupe deux du triangle ABC, en G et en H, les angles AGH et DEF seront égaux comme alternes-externes, par rapport aux parallèles AB, DE, et à la sécante FH ; les angles AHG et DFE le seront comme alternes-internes, par rapport aux parallèles AC, DF ; et le triangle DEF sera, par conséquent, semblable au triangle AGH, qui le sera lui-même au triangle ABC, puisque les angles AHG et AGH sont égaux aux angles ACB, ABC, comme correspondants, par rapport aux parallèles GH, BC, et aux sécantes AC, AB.

Il est évident que les côtés homologues, dans le cas actuel, sont parallèles entre eux.

Pour prouver la dernière partie, soient les deux triangles ABC et DEF (*fig.* 40), placés de manière que le côté EF soit perpendiculaire sur BC prolongé, que DF prolongé le soit sur AC, et enfin que DE prolongé le soit sur AB. Par le point A, opposé au côté BC, perpendiculaire sur EF, on mènera les droites AG et AH, respectivement parallèles aux deux autres côtés DF et DE, du triangle DEF, et, par conséquent, perpendiculaires l'une sur AC, l'autre sur AB. Les angles CAG et BAH seront droits d'après l'hypothèse; si l'on ajoute à chacun le même angle CAH, les deux angles résultants BAC et GAH seront égaux : mais les angles GAH et EDF, ayant par construction leurs côtés parallèles et leur ouverture placée dans le même sens, sont égaux; l'angle BAC sera donc égal à EDF.

Menant ensuite, par le point B, les droites BI et BK parallèles aux côtés EF et DE, on formera les angles droits CBI et ABK, desquels, retranchant une partie commune ABI, il restera les angles égaux ABC, IBK; et le second étant égal à DEF, à cause du parallélisme des droites BI et EF, BK et DE, on en conclura que ABC est aussi égal à DEF. Les triangles ABC et DEF ayant deux angles égaux chacun à chacun, sont, par conséquent, semblables.

On voit, de plus, que les côtés homologues sont ceux qui sont respectivement perpendiculaires, puisque l'angle D étant égal à l'angle A, le côté EF est homologue à BC; et ainsi des autres.

THÉORÈME.

66. *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle égal, chacun à chacun, compris entre des côtés proportionnels.*

Démonstration.—Si l'angle A du triangle ABC (*fig.* 38) est égal à l'angle D du triangle DEF, et que l'on ait AB : DE :: AC : DF, on prendra, sur les côtés AB et AC du premier triangle, deux parties, A*e* et A*f*, respectivement égales à DE et à DF; tirant *ef*, on formera le triangle A*ef* égal au triangle DEF (16); et la droite *ef*, coupant les côtés du triangle BAC en parties proportionnelles, puisqu'on a

$$AB : DE \text{ ou } Ae :: AC : DF \text{ ou } Af,$$

sera parallèle à BC (60). Les angles e et f, respectivement égaux aux angles E et F, le seront aussi aux angles B et C; et, par conséquent, les triangles ABC et DEF, ayant leurs angles égaux, seront semblables (64).

THÉORÈME.

67. *Deux triangles qui ont les côtés proportionnels, chacun à chacun, sont semblables.*

Démonstration. — Soit, dans les triangles ABC, DEF, cette suite de rapports égaux :

$$AB : DE :: AC : DF :: BC : EF.$$

Si l'on prend sur AB une partie Ae égale à DE, et qu'on mène une droite ef parallèle à BC, les triangles ABC et Aef, semblables entre eux (65), donneront

$$AB : Ae :: AC : Af :: BC : ef;$$

mais parce que Ae est égal à DE, tous les rapports de la seconde suite seront égaux à ceux de la première, et comme les antécédents sont les mêmes de part et d'autre, les conséquents seront aussi les mêmes : on aura donc

$$af = DF, \quad ef = EF.$$

Il suit de là que le triangle DEF est égal au triangle Aef; et comme ce dernier est semblable au triangle ABC, il en sera de même du premier.

PROBLÈME.

68. *Construire sur une droite donnée* EF *un triangle semblable au triangle* ABC.

Solution. — On peut construire un triangle semblable à un autre, en partant des divers caractères par lesquels la similitude de ces figures est constatée. Si l'on veut donc former sur la droite donnée EF un triangle qui soit semblable au triangle ABC, on y parviendra : 1°. En menant par les points E et F des droites qui fassent avec EF des angles E et F, respectivement égaux aux angles B et C (65);

2°. En faisant au point E, sur EF, un angle égal à l'angle B, et portant sur le côté DE de cet angle une distance DE quatrième proportionnelle aux trois lignes BC, EF, AB; de cette manière, les deux triangles seront encore semblables, comme ayant, chacun à chacun, un angle égal compris entre des côtés proportionnels (66);

3°. Enfin, en cherchant une quatrième proportionnelle aux trois lignes BC, EF, AB, une autre aux trois lignes BC, EF, AC, et construisant sur les deux lignes trouvées et sur EF un triangle DEF; les triangles DEF et ABC seront semblables, comme ayant leurs côtés proportionnels (67).

N. B. — Il est à propos de remarquer qu'il y a pour la similitude des triangles, comme pour leur égalité, trois cas principaux, que les propositions des nos 16, et 66, 18 et 65, 20 et 67 se correspondent, et que les problèmes des nos 25, 24 et 21 sont analogues aux questions résolues dans celui-ci.

THÉORÈME.

69. *Tant de lignes,* AB, AC, AD, AE, AF, *qu'on voudra* (fig. 41), *menées par un même point* A, *et rencontrées par deux parallèles* GL *et* BF, *sont coupées par ces parallèles en parties proportionnelles, et les coupent aussi en parties proportionnelles.*

Démonstration. — Les triangles BAC, CAD, DAE, EAF, ayant deux de leurs côtés coupés par une droite parallèle au troisième, donnent les proportions (59)

$$\begin{aligned}
AG : BG &:: AH : HC,\\
AH : HC &:: AI : ID,\\
AI : ID &:: AK : KE,\\
AK : KE &:: AL : LF;
\end{aligned}$$

et le dernier rapport de chacune étant le premier de la suivante, on en tire

AG : BG :: AH : HC :: AI : ID :: AK : KE :: AL : LF,

d'où il résulte que les droites AB, AC, AD, AE, AF sont coupées en parties proportionnelles.

De plus, par les triangles BAC, GAH semblables (65), on a

AB : AG :: AC : AH :: BC : GH;

par les triangles CAD et HAI,

AC : AH :: AD : AI :: CD : HI;

par les triangles DAE et IAK,

AD : AI :: AE : AK :: DE : IK;

par les triangles EAF et KAL,

AE : AK :: AF : AL :: EF : KL,

rapports qui sont tous égaux, puisque le second de chaque suite est le premier de celle qui vient après. Ne prenant d'abord que ceux qui renferment les lignes menées du point A, on aura

AB : AG :: AC : AH :: AD : AI :: AE : AK :: AF : AL.

Réunissant ensuite les rapports qui contiennent les parties des parallèles BF et GL, il viendra

BC : GH :: CD : HI :: DE : IK :: EF : KL,

ce qui fait voir que ces lignes sont coupées en parties proportionnelles.

PROBLÈME.

70. *Diviser une droite donnée de la même manière qu'une autre est divisée.*

Solution. — Soient gl la ligne à diviser, et BF la ligne déjà divisée. On décrira sur cette dernière un triangle BAF, dont les trois côtés soient égaux, ce qui s'effectuera suivant le procédé du n° 21, en prenant la ligne BF elle-même pour rayon des deux cercles à décrire des points B et F comme centres; portant ensuite gl de A en G, sur le côté AB, et de A en L, sur le côté AF, on tirera GL; les droites qui joindront les points C, D, E, avec le point A, couperont la ligne GL en parties proportionnelles à celles de BF, comme le demande l'énoncé de la question.

En effet, puisque $AB = AF$, $AG = AL$, on a la proportion évidente,

$$AB : AG :: AF : AL,$$

de laquelle il résulte (60) que GL est parallèle à BF. Le triangle GAL étant donc semblable à BAF donnera cette proportion

$$AB : AG :: BF : GL;$$

et comme, par construction, $BF = AB$, on aura nécessairement $GL = AG = gl$. Cela posé, d'après le théorème précédent, les droites parallèles GL et BF sont divisées en parties proportionnelles, ou l'une comme l'autre.

Si la ligne à diviser était $g'l'$, plus grande que BF, il faudrait prolonger indéfiniment les côtés AB et AF, au-dessous de BF; portant ensuite $g'l'$ sur AB, de A en G', et sur AF, de A en L', on tirerait G'L', et les prolongements des droites AC, AD, AE diviseraient G'L', aux points H', I', K', en parties proportionnelles à celles de BF.

71. *Remarque.* — La question précédente peut encore se résoudre comme il suit.

Soit AH (*fig.* 42) la droite à diviser. On tirera par le point A une droite indéfinie AP, faisant avec AH un angle quelconque PAH, et sur laquelle on portera, à la suite les unes des autres, les parties dans lesquelles est partagée la ligne dont les divisions sont connues; on joindra l'extrémité P de la dernière avec l'extrémité H de la ligne à diviser; puis, par les points I, K, L, M, N et O on mènera, parallèlement à PH, les droites IB, KC, LD, ME, NF, OG, qui couperont AH en parties proportionnelles à celles de AP.

Ce dernier procédé se démontre en observant que le triangle ACK, dont les côtés AC et AK sont coupés par BI parallèle au troisième côté CK, donne (59)

AB : AI :: AC : AK :: BC : IK ;

que le triangle ADL, considéré par rapport à la droite CK, donne

AC : AK :: AD : AL :: CD : KL ;

que le triangle AEM, considéré par rapport à la droite LD, donne

AD : AL :: AE : AM :: DE : LM ;

et ainsi des autres. Toutes ces suites de rapports égaux s'enchaînent par le moyen du second rapport de chacune, qui se trouve le premier dans celle qui vient après : ne prenant donc que les rapports qui contiennent les divisions de la droite AP, on aura

AB : AI :: BC : IK :: CD : KL :: DE : LM :: etc.,

ce qui montre que les parties AB, BC, CD, etc., de AH sont proportionnelles aux parties AI, IK, KL, etc., de AP.

On simplifie un peu ce dernier procédé, en menant par le point H une ligne QH parallèle à AP, et sur laquelle on prend, en commençant au point H, des parties HX, XV, VU, UT, etc., respectivement égales à PO, ON, NM, ML, etc.; les droites PH, OX, NV, etc., qui joindront les points de division correspondants, étant parallèles (54), couperont la droite AH en parties proportionnelles à celles de AP ou de HQ.

72. 1^er^ *corollaire*. — Si, dans la *fig.* 41, les parties de la droite BF, et dans la *fig.* 42, celles de AP, étaient égales entre elles, celles de la droite GL dans la première, et de la droite AH dans la seconde, seraient aussi égales entre elles.

Il suit de là que le procédé du n° 70 et celui du n° 71 peuvent servir à diviser une ligne droite dans un nombre quelconque de parties égales. Il faut pour cela regarder d'abord la droite BF (*fig.* 41) comme indéfinie; puis, prenant sur cette droite une partie BC d'une grandeur arbitraire, la porter à la suite d'elle-même un nombre de fois égal à celui des parties dans lesquelles la droite donnée *gl* doit être divisée : le point F, où se termineront ces parties, sera l'extrémité de la ligne BF, et l'on achèvera la construction comme dans le n° 70.

Par le procédé du n° 71, c'est sur la droite AP (*fig.* 42), considérée comme indéfinie, qu'il faut porter successivement des parties égales et arbitraires, puisque AH représente la ligne donnée.

73. 2e *corollaire.* — La division des droites en parties égales est le fondement de la construction des *échelles,* c'est-à-dire des droites qui servent à mesurer les autres. En effet, si l'on avait divisé d'abord en parties égales la droite CD (*fig.* 3), il n'y aurait eu qu'à chercher combien AB contenait de ces parties, pour avoir le rapport de AB à CD, au moins d'une manière d'autant plus approchée, que les parties de CD auraient été plus petites. L'imperfection des instruments et les bornes de nos sens nous forcent bientôt de nous arrêter dans la division des lignes dont les parties nous échappent par leur petitesse; pour étendre nos moyens à cet égard, on a imaginé la division par les *transversales,* représentée dans la *fig.* 43, dont voici la construction :

Ayant premièrement divisé la ligne AC en un nombre quelconque de parties égales, telles que BC, et voulant ensuite diviser BC en un nombre de parties trop grand pour que chacune de ces dernières puisse être bien distincte, on mènera sur AC, par les points A et C, les perpendiculaires AA'''' et CL; on prendra sur AA'''' une partie arbitraire AA', qu'on portera à la suite d'elle-même autant de fois que l'on voudra faire de parties dans BC (la figure en représente quatre); par les points de division A', A'', A''', A'''', on tirera des droites parallèles à AC; enfin, on joindra les points B et L par la ligne *transversale* BL.

Cela fait, si l'on mène la ligne BK parallèle à CL, on formera les triangles BDE, BFG, BHI, BKL, évidemment semblables entre eux (65), qui donneront ces proportions :

$$\begin{aligned} BD : BK &:: DE : KL, \\ BF : BK &:: FG : KL, \\ BH : BK &:: HI : KL, \end{aligned}$$

desquelles il résulte: 1°. Que BD étant le $\frac{1}{4}$ de BK, DE l'est aussi de KL ou de BC, qui est égal à KL (54);

2°. Que BF étant les $\frac{2}{4}$ ou la $\frac{1}{2}$ de BK, FG l'est aussi de KL ou de BC;

3°. Que BH étant les $\frac{3}{4}$ de BK, HI l'est aussi de KL ou de BC.

On voit par là qu'en prenant sur la première, la seconde et la troisième des droites parallèles à AB, les distances A'E, A''G, A'''I, respectivement égales à A'D + DE, A''F + FG, A'''H + HI, on aura

$$AB + \tfrac{1}{4}BC,\ AB + \tfrac{2}{4}BC,\ AB + \tfrac{3}{4}BC.$$

Ceci suffit pour montrer comment on peut construire une échelle de transversales avec des divisions quelconques, et l'usage qu'on peut en faire.

Une semblable échelle prend le nom d'échelle de *dixmes* quand elle contient dix parallèles à AB, parce qu'elle donne alors les dixièmes de BC.

THÉORÈME.

74. *Si de l'angle droit d'un triangle rectangle on abaisse une perpendiculaire sur le côté opposé, qu'on nomme* hypoténuse: 1°. *Cette perpendiculaire partagera le triangle en deux autres qui lui seront semblables, et qui le seront, par conséquent, entre eux.*

2°. *Elle divisera l'hypoténuse en deux parties ou segments, tels que chaque côté de l'angle droit sera moyen proportionnel entre le segment qui lui est adjacent et l'hypoténuse entière.*

3°. *La perpendiculaire sera moyenne proportionnelle entre les deux segments de l'hypoténuse.*

Démonstration. — Le triangle ABC (*fig.* 44) étant supposé rectangle en B, et BD étant perpendiculaire sur AC, les triangles ABC et ABD seront semblables (65); car ils auront, chacun à chacun, deux angles égaux, savoir : l'angle A, qui leur est commun, et l'angle droit ABC, dans le premier, égal à l'angle droit ADB, dans le second. Le triangle BDC est, par les mêmes raisons, semblable au triangle ABC, puisque l'angle C leur est commun, et que l'angle BDC de l'un est droit, ainsi que l'angle ABC de l'autre.

Si l'on compare successivement chacun des deux triangles ABD et BDC avec le triangle ABC, en observant que les angles ABD et CBD sont respectivement égaux aux angles C et A, on trouvera, entre leurs côtés homologues, ces proportions :

$$AD : AB :: AB : AC,$$
$$CD : BC :: BC : AC,$$

qui constituent la seconde partie de la proposition.

Comparant ensuite les triangles ABD et BCD l'un à l'autre, on aura

$$AD : BD :: BD : CD,$$

ce qui forme la troisième partie de l'énoncé ci-dessus.

75. *Corollaire.* — Il suit, du théorème précédent, que les trois côtés d'un triangle rectangle étant rapportés à une mesure commune, la seconde puissance du nombre qui exprime la longueur de l'hypoténuse est égale à la somme des secondes puissances des nombres qui expriment les longueurs des deux autres côtés.

En effet, les proportions

$$\mathrm{AD} : \mathrm{AB} :: \mathrm{AB} : \mathrm{AC},$$
$$\mathrm{CD} : \mathrm{BC} :: \mathrm{BC} : \mathrm{AC}$$

donnent

$$\mathrm{AD} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}^2}{\mathrm{AC}}, \quad \mathrm{CD} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}^2}{\mathrm{AC}};$$

et en ajoutant AD avec CD, on a

$$\mathrm{AC} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2}{\mathrm{AC}}, \quad \text{puis} \quad \overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2.$$

Il suit de là que l'on peut trouver l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont on a les deux autres côtés. Si, par exemple, $\mathrm{AB} = 3$, $\mathrm{BC} = 4$, on aura

$$\overline{\mathrm{AC}}^2 = 9 + 16 = 25, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{AC} = \sqrt{25} = 5.$$

On peut aussi trouver un des côtés de l'angle droit, quand on connaît l'autre et l'hypoténuse, parce que de

$$\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 \quad \text{on tire} \quad \overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2 - \overline{\mathrm{BC}}^2.$$

Si, par exemple, $\mathrm{AC} = 13$, $\mathrm{BC} = 12$, on aura

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = 169 - 144 = 25, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{AB} = 5.$$

En général,

$$\mathrm{AC} = \sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2}, \quad \mathrm{AB} = \sqrt{\overline{\mathrm{AC}}^2 - \overline{\mathrm{BC}}^2}.$$

THÉORÈME.

76. *Les trois côtés d'un triangle quelconque étant rapportés à une mesure commune, et exprimés par conséquent en nombres, si, de l'extrémité de l'un*

quelconque de ces côtés, on abaisse une perpendiculaire sur l'un des deux autres, la seconde puissance du premier sera égale à la somme des secondes puissances des derniers, moins deux fois le produit du côté sur lequel tombe la perpendiculaire par la distance de cette perpendiculaire à l'angle opposé au premier côté, si cet angle est aigu, et plus deux fois le même produit, si cet angle est obtus : c'est-à-dire qu'on aura, dans le premier cas (fig. 45 et 46),

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,\overline{AB} \times \overline{BD},$$

et dans le deuxième (fig. 47),

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,\overline{AB} \times \overline{BD}.$$

Démonstration. — Quand la perpendiculaire CD (*fig.* 45) partage ABC en deux triangles, ACD et BCD, rectangles en D, le premier donne d'abord, en vertu du numéro précédent,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2,$$

et l'on tire du second,

$$\overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2.$$

D'après cette valeur de $\overline{CD}^2$, celle de $\overline{AC}^2$ devient

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2;$$

mais il est visible que $AD = AB - BD$, nombre dont le carré est $\overline{AB}^2 - 2\,\overline{AB} \times \overline{BD} + \overline{BD}^2$ (1) : mettant cette valeur dans l'expression de $\overline{AC}^2$, on aura enfin

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 - 2\,\overline{AB} \times \overline{BD} + \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2,$$

(1) Dans cette proposition, où je regarde les lignes comme évaluées en nombres, j'ai dû supposer connue la composition de la seconde puissance d'un nombre égal à la somme ou à la différence de deux autres, composition à laquelle on peut d'ailleurs parvenir par le raisonnement seul, sans le secours des caractères algébriques.

ce qui se réduit à

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,\overline{AB} \times \overline{BD}.$$

Dans la *fig.* 46, où la perpendiculaire tombe hors du triangle, la différence consiste en ce que

$$AD = BD - AB;$$

mais on a toujours, pour le carré,

$$\overline{AB}^2 - 2\,\overline{AB} \times \overline{BD} + \overline{BD}^2.$$

Ainsi, $\overline{AC}^2$ a la même valeur que ci-dessus : voilà le premier cas du théorème.

Lorsque le côté AC (*fig.* 47) est opposé à un angle obtus, la perpendiculaire tombe nécessairement hors du triangle ABC; on trouve encore par les triangles ACD et BCD, rectangles en D,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2, \quad \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2;$$

on en conclut

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2;$$

mais on a $AD = AB + BD$, valeur dont le carré est $\overline{AB}^2 + 2\,\overline{AB} \times \overline{BD} + \overline{BD}^2$, et de laquelle il résulte

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + 2\,\overline{AB} \times \overline{BD} + \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2,$$

ce qui se réduit à

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,\overline{AB} \times \overline{BD}.$$

Tel est le second cas de l'énoncé.

N. B. — Les parties AD et BD, déterminées sur le côté AB, par la perpendiculaire CD, se nomment *segments.*

77. *Corollaire.* — En rapprochant ce théorème du précédent, on en conclura que l'on peut, lorsqu'on connaît les trois côtés d'un triangle, déterminer si l'angle opposé à l'un quelconque de ces côtés est aigu, droit ou obtus. En effet, dans le premier cas où

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,\overline{AB} \times \overline{BD}$, il est évident que la seconde puissance de AC est moindre que la somme de celles des deux autres côtés AB et BC. Dans le second cas, l'angle B étant droit, on a seulement

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2;$$

ainsi, la deuxième puissance de AC est égale à la somme de celles des deux autres côtés. Dans le troisième cas enfin, où $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,\overline{AB} \times \overline{BD}$, la seconde puissance de AC surpasse la somme de celle des deux autres côtés.

Ces remarques étant appliquées au triangle dont les côtés sont exprimés par 5, 7, 8, et leurs secondes puissances par 25, 49, 64, il en résulte que l'angle opposé au côté 8 est aigu, puisque la seconde puissance de ce côté étant 64, se trouve moindre que la somme 74 des secondes puissances des deux autres côtés.

Il est bon d'observer que l'espèce de l'angle opposé au plus grand côté fera connaître celle du triangle (53).

Des Polygones.

78. Les surfaces planes terminées par un assemblage quelconque de lignes droites se nomment *polygones*. Le plus simple de tous est le *triangle*. Les polygones de quatre côtés se nomment, en général, *quadrilatères;* de cinq, *pentagones;* de six, *hexagones;* de sept, *heptagones;* de huit, *octogones;* de neuf, *ennéagones;* de dix, *décagones;* etc.

On ne pousse guère cette nomenclature au delà du polygone de dix côtés que pour le *dodécagone,* polygone de douze côtés, et le *pentédécagone,* qui en a quinze.

Dans les *fig.* 48 et 49, ABCDEF représente un polygone de six côtés ou un *hexagone*. Tous les angles de la première figure, ayant leur ouverture en dedans du polygone, sont des angles *saillants;* l'angle DEF de la *fig.* 49

est un angle *rentrant*, parce qu'il a son ouverture en dehors du polygone.

Les lignes telles que CA, CF, etc., tirées entre des angles du polygone qui ne sont pas adjacents au même côté, se nomment *diagonales*.

79. Parmi les quadrilatères ou polygones de quatre côtés, on désigne particulièrement sous le nom de *parallélogramme* celui dont les côtés opposés sont parallèles. ABCD (*fig.* 50) est un parallélogramme.

Il suit du n° 54 : 1°. Que chacune des diagonales AC et BD partage le parallélogramme en deux triangles égaux;

2°. Que les côtés opposés AB et DC, AD et BC d'un parallélogramme sont respectivement égaux;

3°. Que, réciproquement, si les côtés opposés d'une figure de quatre côtés sont égaux, ou bien si deux côtés opposés sont égaux et parallèles, cette figure est un parallélogramme.

THÉORÈME.

80. *Les deux diagonales* AC *et* BD *d'un parallélogramme se coupent mutuellement en deux parties égales.*

Démonstration. — Les triangles AOD et BOC sont égaux (18); car les côtés AD et BC sont égaux par l'hypothèse, les angles DAO, OCB sont égaux comme alternes-internes par rapport à la sécante AC et aux parallèles AD, BC, et les angles ADO et OBC le sont aussi comme alternes-internes par rapport à la sécante BD : donc

$$AO = OC, \quad DO = OB.$$

THÉORÈME.

81. *En joignant l'un des angles d'un polygone à tous les autres, on partage ce polygone en un nombre de triangles égal à celui de ses côtés, diminué de deux unités.*

Démonstration. — Cette proposition est presque évidente par l'inspection de la *fig.* 48, où l'on voit que les diagonales CA, CF, CE, menées de l'angle C aux angles A, F et E, partagent le polygone ABCDEF, de six côtés, en quatre triangles, ACB, ACF, FCE, ECD. On se convaincra qu'elle convient à un polygone d'un nombre quelconque de côtés, en observant que les deux triangles extrêmes, tels que ACB, ECD, entre lesquels seront compris tous ceux que peut renfermer le polygone proposé, contiendront chacun deux de ses côtés, tandis que tous les autres n'en contiendront qu'un seul : il y aura donc dans ces deux triangles quatre côtés du polygone. Le nombre des triangles intermédiaires sera, par conséquent, égal à celui des côtés du polygone, diminué de quatre; et le nombre total des triangles sera, comme le porte l'énoncé, égal à celui des côtés du polygone, diminué de deux unités.

82. *Corollaire.* — Il suit de là que la somme de tous les angles intérieurs ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB d'un polygone vaut autant de fois deux droits qu'il a de côtés moins deux, puisque cette somme se compose de celles des angles de tous les triangles ACB, ACF, FCE, ECD, qui valent chacune deux droits, et que le polygone contient un nombre de ces triangles égal à celui de ses côtés, diminué de deux unités.

Dans la *fig.* 49, l'angle rentrant DEF est extérieur, et non pas intérieur. En faisant partir les diagonales du sommet E de cet angle, on voit évidemment qu'il est remplacé dans la somme des angles intérieurs par celle des angles DEC, CEB, BEA, AEF, et que, réuni à cette dernière, il forme quatre droits (13).

THÉORÈME.

83. *Si l'on prolonge dans le même sens, comme dans le premier polygone de la* fig. 48, *tous les côtés d'un polygone qui n'a point d'angles rentrants, la somme*

des angles extérieurs formés par chaque côté, et par le prolongement de celui qui lui est contigu, est égale à quatre droits, quel que soit d'ailleurs le nombre des côtés du polygone.

Démonstration. — Chaque angle extérieur, comme *a*AB, réuni avec l'intérieur BAF auquel il est adjacent, forme une somme égale à deux droits, et qui se trouve répétée, pour tout le polygone, autant de fois qu'il a de côtés ou d'angles : la somme des angles, tant extérieurs qu'intérieurs, vaudra donc autant de fois deux droits que le polygone a de côtés. Retranchant de cette somme celle des angles intérieurs, égale à autant de fois deux droits que le même polygone a de côtés moins deux, il restera deux fois deux droits ou quatre droits pour la somme des angles extérieurs.

84. *Remarque.* — Deux polygones sont égaux lorsqu'ils sont composés d'un même nombre de triangles égaux et semblablement disposés ou assemblés de la même manière ; car il est évident que, placés l'un sur l'autre, ces polygones se couvriront parfaitement.

THÉORÈME.

85. *Lorsqu'on connaît tous les côtés d'un polygone, à l'exception d'un seul, et qu'on connaît aussi les angles compris entre les côtés donnés, le polygone est déterminé et peut être construit.*

Démonstration. — En effet, si dans le polygone ABCDEF on connaît les côtés AB, BC, CD, DE, EF et les angles qu'ils comprennent, on pourra, sur $A'B' = AB$, faire au point B' l'angle $A'B'C' = ABC$, puis prendre $B'C' = BC$; faire au point C', sur $B'C'$, l'angle $B'C'D' = BCD$, puis prendre $C'D' = CD$; faire au point D', sur $C'D'$, l'angle $C'D'E' = CDE$, puis prendre $D'E' = DE$; faire au point E', sur $D'E'$, l'angle $D'E'F' = DEF$, et prendre enfin $E'F' = EF$. Étant parvenu ainsi au point F', il n'y aura qu'une seule manière de le joindre avec le point A', et de *fermer* le polygone $A'B'C'D'E'F'$.

Il est visible que ce polygone sera égal, dans toutes ses parties, au polygone ABCDEF; car si on le porte sur ce dernier, en plaçant $A'B'$ sur AB, à cause de l'égalité des angles ABC et $A'B'C'$, le côté $B'C'$ tombera sur son égal BC; et continuant ainsi de proche en proche, on reconnaîtra que les points A', B', C', D', E', F' tomberont respectivement sur les points A, B, C, D, E, F : d'où il suit que les deux polygones se couvriront parfaitement.

86. *Remarque.* — Il y a plusieurs autres cas d'égalité entre deux polygones; je n'ai voulu donner dans le précédent qu'un exemple de cette égalité, pour montrer qu'un polygone d'un nombre quelconque N de côtés, et renfermant, par conséquent, un nombre N d'angles, ce qui fait en tout $2N$ choses, est déterminé par la connaissance de $2N - 3$ de ces choses. On observera ici, comme on l'a dû remarquer dans les différents cas d'égalité des triangles, que les N angles ne doivent compter que pour $N - 1$ données, puisque leur somme est toujours donnée (82).

87. On nomme *polygones semblables* ceux dont les angles sont égaux, et dont les côtés homologues (ou semblablement placés) sont proportionnels.

THÉORÈME.

88. *Deux polygones composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, et semblablement disposés, ont leurs angles égaux chacun à chacun, leurs côtés homologues proportionnels, et sont, par conséquent, semblables.*

Démonstration. — Soient BAEDC et *baedc* (*fig.* 51) les polygones proposés; les triangles ABC, *abc*, étant semblables, ont leurs angles égaux : ainsi l'on a

$$B = b, \quad BAC = bac.$$

Par la même raison, les triangles ACE et *ace* donnent

$$CAE = cae, \quad CEA = cea;$$

d'où il suit que l'angle BAE, formé des angles BAC et CAE dans le premier polygone, est égal à l'angle *bae*, formé des angles *bac* et *cae* dans le second. On prouvera de même l'égalité des angles AED et *aed*, EDC et *edc*; quant aux derniers angles BCD et *bcd*, il est visible qu'ils sont égaux, puisqu'ils sont formés, l'un des angles BCA, ACE, ECD, l'autre des angles *bca*, *ace*, *ecd*, qui sont respectivement égaux aux premiers, comme angles homologues de triangles semblables.

En formant les proportions qui résultent de la similitude des triangles ABC et *abc*, ACE et *ace*, ECD et *ecd*, on aura

$$\begin{aligned} BC : bc &:: AB : ab :: AC : ac, \\ AC : ac &:: AE : ae :: CE : ce, \\ CE : ce &:: ED : ed :: CD : cd. \end{aligned}$$

Le premier rapport de chaque suite, formé par les côtés qui sont communs aux triangles adjacents, étant le même que le dernier de la précédente, ces rapports sont tous égaux entre eux : en ne prenant donc que ceux qui contiennent les côtés des polygones, il viendra

$$BC : bc :: AB : ab :: AE : ae :: ED : ed :: CD : cd,$$

ce qui prouve que les côtés homologues sont proportionnels.

THÉORÈME.

89. ***Lorsque deux polygones sont semblables, ils sont composés d'un même nombre de triangles semblables, chacun à chacun, et semblablement disposés.***

Démonstration. — Puisque, par l'hypothèse, les angles de l'un des polygones sont respectivement égaux à ceux de l'autre, et les côtés homologues du premier sont proportionnels à ceux du second, on aura d'abord l'angle B égal à l'angle b, et

$$BC : bc :: AB : ab;$$

d'où il suit que les triangles ABC et abc sont semblables (66) : les angles BAC et bac seront donc égaux. Si on les retranche des angles BAE et bae, égaux comme appartenant aux polygones, les restes CAE et cae seront égaux ; de plus, les triangles semblables ABC et abc donnant AB : ab :: AC : ac, et les polygones AB : ab :: AE : ac, on aura

$$AC : ac :: AE : ae;$$

d'où il suit que les triangles CAE, cae sont encore semblables (66). On prouvera de même la similitude de tous les triangles de chacun des polygones, en quelque nombre que soient ces triangles.

PROBLÈME.

90. *Construire, sur une ligne donnée, un polygone semblable à un polygone donné.*

Solution. — Soient bc et BAEDC la droite et le polygone donnés ; on fera sur bc, par l'un des procédés du n° 68, un triangle abc semblable au triangle ABC, ce qui déterminera le point a. Pour avoir le point e, on fera de même sur ac un triangle cae semblable au triangle CAE, et ainsi de suite. Le polygone $abcde$ sera semblable au polygone ABCDE, puisqu'ils seront composés l'un et l'autre d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, et semblablement disposés.

Si l'on portait le côté bc sur BC, de C en b', il suffirait de tirer par le point b' la droite $b'a'$ parallèle à BA, puis par le point a' la droite $a'e'$ parallèle à AE, etc., pour former les triangles $b'Ca'$, $a'Ce'$, etc., respectivement semblables aux triangles BCA, ACE, etc. ; le polygone $b'a'e'd'C$ serait construit ainsi sur le côté donné, et serait semblable au polygone BAEDC.

91. *Remarque.* — Dans ce qui précède, j'ai mené toutes les diagonales d'un même angle; mais on peut partager les polygones en triangles de plusieurs autres manières, et les propositions ci-dessus s'étendent également à ces cas, parmi lesquels il en est un qu'il est bon de connaître : c'est celui où on lie tous les angles du polygone aux deux extrémités de l'un de ses côtés. Ce cas est représenté dans la *fig.* 52, où l'on a joint les points C, D, E. aux points A et B par des diagonales.

1°. Il est clair que la position des trois premiers est fixée, à l'égard de la droite AB, dès que les triangles ABC, ABD, ABE sont donnés; et l'on voit bien évidemment de cette manière que, pour déterminer un polygone, il ne faudra qu'un nombre de triangles moindre de deux unités que celui des angles ou des côtés du polygone. On voit aussi que si N désigne ce dernier nombre, la détermination de la figure dépendra des 2 (N — 2) lignes menées de chacun des angles de la base et de cette base; ce qui fait en tout 2 N — 3 données (86).

2°. On démontrera sans difficulté, à peu près comme dans les n^{os} 88 et 89, que si les triangles ABC et *abc*, ABD et *abd*, ABE et *abe* sont respectivement semblables, les polygones ABCDE et *abcde* le seront aussi, et que, réciproquement, si ces polygones sont semblables, les triangles correspondants le seront eux-mêmes (1).

(1) L'art de lever les plans n'est que celui de construire sur le papier des polygones semblables à ceux que forment sur le terrain les points dont on veut connaître les situations respectives. On voit qu'il doit se réduire, en dernière analyse, à concevoir ces points liés entre eux par des triangles, et à mesurer sur ces triangles un nombre suffisant d'angles ou de côtés pour pouvoir en faire de semblables sur le papier, suivant les procédés du n° 68. Voilà tout ce qu'on peut dire sans entrer dans le détail des instruments propres à mesurer les angles, détail déplacé dans les traités généraux, à peu près inintelligible pour les personnes qui n'ont pas vu ces instruments, et superflu pour celles qui les connaissent.

THÉORÈME.

92. *Si l'on tire, dans deux polygones semblables, deux droites qui soient semblablement placées dans chacun d'eux, c'est-à-dire qui passent par des points semblablement placés sur les côtés homologues, et qui fassent avec ces côtés des angles égaux entre eux ou bien qui coupent, dans chaque polygone, deux côtés homologues en parties proportionnelles, ces droites seront proportionnelles aux côtés homologues des polygones.*

Démonstration. — Soient les droites GF et gf menées par des points G et g où l'on ait BG : bg :: AB : ab, et sous des angles FGB et fgb qui soient égaux; les triangles BGC et bgc seront alors semblables, à cause des angles égaux B et b et des côtés BG et bg proportionnels à BC et à bc, puisque les uns et les autres le sont à AB et à ab : on a donc

$$GC : gc :: BG : bg, \quad \text{ou} \quad :: AB : ab,$$

et

$$BCG = bcg, \quad CGB = cgb.$$

On conclut de là que GCF, ou BCF — BCG, est égal à gcf, ou à $bcf - bcg$; et parce que FGB $= fgb$, on aura CGF, ou FGB — CGB, égal à cgf, ou à $fgb - cgb$: les triangles FCG et fcg seront donc semblables et donneront

$$FG : fg :: FC : fc :: GC : gc \quad \text{ou} \quad :: AB : ab,$$

puisqu'on a ci-dessus GC : gc :: AB : ab.

Si, au lieu de faire les angles FGB et fgb égaux, on prend les points F et f de manière que FC : fc :: BG : bg, les triangles FCG et fcg seront alors semblables comme ayant un angle égal compris entre des côtés proportionnels; on tirera les mêmes conclusions que ci-dessus, et l'on prouvera, dans ce cas, l'égalité des angles FGB et fgb.

THÉORÈME.

93. *Les contours de deux polygones semblables sont entre eux comme les côtés homologues de ces polygones.*

Démonstration. — Les polygones semblables ABCDE, *abcde* donnent cette suite de rapports égaux :

$$AB : ab :: BC : bc :: CD : cd :: DE : de :: AE : ae;$$

on en conclura

$$AB + BC + CD + DE + AE : ab + bc + cd + de + ae :: AB : ab,$$

c'est-à-dire que

le contour ABCDE : au contour *abcde* :: AB : *ab*.

De la ligne droite et du cercle.

94. On a vu dans le n° 28 que l'on ne pouvait mener d'un même point à une droite donnée trois droites égales; il résulte évidemment de là qu'une droite et un cercle ne peuvent se couper en plus de deux points.

Toute droite qui coupe la circonférence du cercle, et qui est prolongée en dehors, se nomme *sécante*. EF (*fig.* 53) est une sécante.

La partie CD de cette droite, comprise dans le cercle, se nomme *corde*.

95. On dit que la corde CD qui passe par les extrémités d'un arc quelconque du cercle CGD *sous-tend* cet arc; mais il faut observer que la même droite est aussi la corde de l'arc CHD qui, joint à CGD, compose la circonférence entière. Lors donc que le premier arc sera moindre que la demi-circonférence, le second sera nécessairement plus grand.

96. Lorsqu'une corde passe par le centre du cercle, on lui donne le nom de *diamètre*. La droite AB, qui passe par le point O, est un diamètre.

Tous les diamètres du cercle sont égaux, puisqu'ils sont composés de deux rayons, et que tous les rayons sont égaux.

Il est visible que le diamètre est la plus grande des droites que l'on peut tirer dans la circonférence du cercle, puisque toute autre corde CD est moindre que la somme des deux rayons menés par ses extrémités (15).

97. Le diamètre AB partage la circonférence en deux parties égales; car si l'on plie la figure le long de la droite AB, la partie AGB de la circonférence doit se confondre avec la partie AHB, sans quoi tous les points de l'une ou de l'autre ne seraient pas également éloignés du centre O.

Le même raisonnement prouve aussi que deux cercles décrits du même rayon sont égaux; car il en résulte que si l'on place le centre de l'un de ces cercles sur celui de l'autre, leurs circonférences doivent se confondre.

THÉORÈME.

98. *Si l'on porte un arc quelconque de cercle sur un autre arc du même cercle ou d'un cercle décrit du même rayon que le premier, de manière que deux points quelconques de l'un des arcs tombent sur l'autre, et que les convexités soient tournées du même côté, le plus petit de ces arcs se confondra dans toute son étendue avec le plus grand.*

Démonstration. — En effet, si l'on porte l'arc A′C′ (*fig.* 54) sur AC, en mettant le point A′ sur le point A, et que le point C′ tombe en C, la corde A′C′ couvrira exactement AC; et comme les rayons O′A′ et O′C′ sont égaux aux rayons OA et OC, le point O′ se trouvera sur le point O (20); dès lors, tous les points de l'arc A′C′ doivent tomber sur ceux de l'arc AC, puisque les uns sont autant éloignés du centre O′ que les autres le sont du centre O : donc l'arc A′C′ se confondra avec l'arc AC (1).

(1) La propriété de la circonférence du cercle, démontrée ci-dessus, est d'autant plus remarquable qu'elle n'appartient qu'à cette courbe et à la

99. *Corollaire.* — Il suit de là que, dans le même cercle ou dans deux cercles décrits du même rayon, les arcs dont les cordes sont égales, sont égaux, pourvu toutefois qu'ils soient de même espèce, c'est-à-dire qu'ils soient tous moindres que la demi-circonférence ou tous plus grands. En effet, lorsque les cordes sont placées l'une sur l'autre, comme dans le cas précédent, les arcs se couvrent exactement.

La proposition réciproque est également vraie, c'est-à-dire que quand les arcs sont égaux (dans un même cercle ou dans les cercles décrits du même rayon), les cordes sont égales; car les arcs étant posés l'un sur l'autre et se couvrant exactement, les extrémités du premier se confondent avec celles du second. Ainsi, l'arc A′C′ étant placé sur l'arc AC, de manière que le point A′ soit sur A, le point C′ soit sur C, les droites AC et A′C′ se couvrent exactement et sont égales.

THÉORÈME.

100. *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, le plus grand arc a la plus grande corde, et réciproquement, pourvu toutefois que les arcs que l'on compare soient moindres que la demi-circonférence.*

Démonstration. — 1°. L'arc AE étant plus grand que l'arc AC, l'angle AOE sera visiblement plus grand que l'angle AOC, et, par le n° 19, le côté AE du triangle AOE sera plus grand que le côté AC du triangle AOC, puisque ces triangles ont, chacun à chacun, deux côtés égaux;

2°. La corde AE étant plus grande que la corde AC, l'angle AOE sera plus grand que l'angle AOC : l'arc AE surpassera donc l'arc AC.

---

ligne droite, et qu'elle rend évidente la similitude de toutes les parties de la circonférence du cercle ou l'uniformité de sa courbure. Telle est la raison qui m'a engagé à donner à cette proposition un énoncé différent de celui qu'on trouve dans la plupart des livres élémentaires, et qui fait l'objet du corollaire suivant.

PROBLÈME.

101. *Deux arcs du même cercle ou de cercles égaux étant donnés, trouver le rapport de leurs longueurs.*

Solution. — Il est évident que la question proposée se résoudrait comme celle du n° 5, si l'on pouvait porter les arcs de cercle l'un sur l'autre, comme on le fait pour des droites; mais une pareille superposition ne pouvant avoir lieu dans la pratique, on y supplée par celle des cordes qui, lorsqu'elles sont égales, correspondent à des arcs égaux. La corde de l'arc CD (*fig.* 55) pourra être portée deux fois sur l'arc AB, de A en E; et l'arc AE, déterminé ainsi, sera composé de deux parties Ad et dE, égales chacune à CD : on aura donc

$$AB = 2\,CD + EB.$$

On prendra la corde du reste EB pour la porter sur l'arc CD, de C en F, ce qui s'effectuera une fois, et laissera pour reste l'arc FD; d'où il suit

$$CD = EB + FD.$$

Enfin, la corde du second reste FD pouvant se porter quatre fois sur le premier EB, on aura

$$EB = 4\,FD.$$

En remontant de cette dernière valeur à celle des arcs précédents, on obtiendra

$$EB = 4\,FD, \quad CD = 5\,FD, \quad AB = 14\,FD;$$

l'arc FD, commune mesure des arcs AB et CD, étant contenu 14 fois dans l'un et 5 fois dans l'autre, on en conclura que les arcs proposés sont entre eux comme les nombres 14 et 5.

L'opération se termine ici, comme pour le cas des lignes droites, lorsqu'on trouve un reste qui est contenu exactement dans le précédent, ou qui est tel que le reste suivant échappe aux sens par sa petitesse (1).

102. *Remarque.* — Si l'on conçoit qu'une droite AB (*fig.* 56), qui coupe le cercle en deux points A et B, tourne autour de l'un de ces points, de A par exemple, et qu'en tendant à sortir du cercle elle prenne des positions telles que AB', on voit que les points d'intersection de la droite et du cercle se rapprochent sans cesse, et qu'enfin il y a une dernière position AC dans laquelle ces deux points étant réunis en un seul, la droite n'a plus qu'un point de commun avec le cercle, ou ne fait que le toucher. Dans cette position, la droite AC est *tangente* au cercle.

THÉORÈME.

103. *La perpendiculaire menée par un point de la circonférence du cercle, sur le rayon qui passe par ce point, est tangente au cercle; et, réciproquement, la tangente à un point quelconque de la circonférence est perpendiculaire à l'extrémité du rayon mené par ce point.*

Démonstration. — La ligne AB (*fig.* 57), perpendiculaire sur le rayon AO, au point A, a tous ses autres points plus éloignés du centre O que ne l'est le point A, puisque toutes les droites menées d'un côté ou de l'autre, comme OB et OC, sont des obliques nécessairement plus longues que AO (28). Les points C et B sont, par conséquent, hors du cercle, et la ligne AB, n'ayant qu'un seul point A de commun avec la circonférence DA, est tangente.

Il est aussi facile de voir que la tangente au point A ne

(1) Cette manière de déterminer le rapport de deux arcs de cercle se trouve dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1724, p. 250.

On peut aussi comparer un arc quelconque à la circonférence entière, en portant la corde de l'arc, toujours dans le même sens, jusqu'à ce qu'on retombe sur le point d'où l'on est parti, et notant le nombre de fois qu'on a parcouru la circonférence. Si, par cet exemple, cet arc répété 8 fois remplit 3 fois la circonférence, il en sera évidemment les $\frac{3}{8}$.

peut être que la droite AB perpendiculaire sur AO; car cette tangente n'ayant de commun avec la circonférence que le point de *contact* A, et tous ses autres points étant plus éloignés du centre que celui-ci, il s'ensuit que le rayon AO est la plus courte ligne qu'on puisse mener du centre sur la tangente, et que, par conséquent, il est perpendiculaire sur cette tangente.

104. *Corollaire.* — Il suit de là que l'on mène une tangente à un point donné A de la circonférence d'un cercle DAE, en élevant une perpendiculaire AB à l'extrémité du rayon qui passe par ce point.

THÉORÈME.

105. *Toute droite* CD (fig. 58), *élevée perpendiculairement sur le milieu d'une corde* AB, *passe par le centre* O *du cercle et par le milieu* C *de l'arc sous-tendu par cette corde.*

Démonstration. — Puisque CD est, par l'hypothèse, perpendiculaire sur le milieu de AB, elle doit passer par tous les points également éloignés des points A et B; et le centre O est un de ces points, car il est à égale distance des extrémités A et B qui sont sur la circonférence ACB. Le point C, où la perpendiculaire CD rencontre la circonférence, étant également éloigné des extrémités A et B de l'arc ACB, les cordes AC et BC seront nécessairement égales; les arcs sous-tendus par ces cordes seront donc égaux (99); le point C sera donc le milieu de l'arc ACB : donc la droite CD passera par le centre O et par le milieu de l'arc sous-tendu par la corde AB.

106. 1er *corollaire.* — 1°. Puisque deux points suffisent pour déterminer la position d'une droite (3), et que le milieu d'une corde, le centre du cercle et le milieu de l'arc sous-tendu par la corde sont toujours sur la même droite, il s'ensuit que lorsqu'on sait qu'une droite donnée passe

par deux de ces points, on en doit conclure qu'elle passe nécessairement par le troisième.

2°. Comme on ne peut, d'un point donné, abaisser sur une droite qu'une seule perpendiculaire (32), il est encore évident, par ce qui précède, que toute perpendiculaire abaissée du centre ou du milieu de l'arc sur la corde tombera sur le milieu de cette droite.

107. 2e *corollaire*. — Il suit encore du théorème précédent que, pour diviser un arc en deux parties égales, il suffit d'élever une perpendiculaire sur le milieu de la corde qui sous-tend cet arc, puisque cette perpendiculaire passera par le milieu de l'arc proposé.

THÉORÈME.

108. *Les arcs interceptés dans un même cercle, entre deux cordes parallèles ou entre une tangente et une corde parallèle, sont égaux.*

Démonstration. — Si les cordes BC, DE et la tangente FG (*fig.* 59) sont parallèles, et que l'on joigne le centre O et le point de contact A par un rayon, ce rayon, étant perpendiculaire sur la tangente FG (103), le sera aussi sur les cordes BC et DE (42); il divisera en deux parties égales les arcs BAC et DAE; et, par conséquent, si des arcs AB et AC, égaux comme moitiés de l'arc BAC, on retranche les arcs AD et AE, égaux comme moitiés de l'arc DAE, les restes BD et EC seront égaux, ce qui est la première partie de l'énoncé du théorème : l'égalité des arcs AB et AC prouve la seconde.

THÉORÈME.

109. *Si des sommets* O *et* O′ *de deux angles* AOC *et* A′O′C′ (fig. 60) *on décrit deux arcs de cercle du même rayon, le rapport des arcs compris entre les côtés de chaque angle sera le même que celui de ces angles.*

Démonstration. — Si les arcs AC et A′C′ ont une commune mesure $AB = A'B'$, en portant cette commune mesure sur chacun autant de fois qu'elle y est contenue, on les divisera tous deux en parties égales; et si l'on joint les différents points de division avec le sommet de l'angle correspondant par des droites comme OB et O'B', on partagera les angles AOC et A'O'C' en autant de parties égales que les arcs AC et A'C' en contiennent.

En effet, les cordes AB et A'B' étant égales, les triangles AOB et A'O'B' seront égaux comme ayant tous leurs côtés égaux chacun à chacun (20), puisque d'ailleurs les droites OA, OB, O'A' et O'B' sont égales comme rayons de cercles égaux : l'angle AOB sera donc égal à l'angle A'O'B'. Cela posé, les angles AOC et A'O'C', comprenant chacun autant d'angles égaux à AOB que les arcs AC et A'C' contiennent de parties égales à AB, seront évidemment dans le même rapport que ces arcs, et auront pour commune mesure l'angle AOB.

Le raisonnement précédent exige que les arcs AC et A'C' soient commensurables entre eux; mais la proposition aurait également lieu quand même ils seraient incommensurables, car on ne peut supposer que les angles AOC et A'O'C' (*fig.* 61) soient dans un rapport plus grand ou plus petit que celui de ces arcs.

Si, par exemple, au lieu d'avoir cette proportion,

$$AOC : A'O'C' :: AC : A'C',$$

on avait la suivante :

$$AOC : A'O'C' :: AC : A'd,$$

l'arc $A'd$ étant plus grand que A'C', et qu'on divisât l'arc AC en parties égales assez petites pour qu'étant portées sur l'arc A'C', un des points de division e tombât entre C' et d, on aurait entre les angles AOC, $A'O'e$ et les arcs AC et $A'e$, respectivement commensurables, cette proportion :

$$AOC : A'O'e :: AC : A'e,$$

dont les antécédents sont les mêmes que ceux de la précédente, ce qui donnerait, par conséquent,

$$A'O'C' : A'O'e :: A'd : A'e,$$

résultat absurde, puisque $A'O'C' < A'O'e$, et que $A'd > A'e$.

Si l'on prenait l'arc $A'd'$ moindre que $A'C'$, on n'aurait pas non plus

$$AOC : A'O'C' :: AC : A'd';$$

car, pour le point de division e', on aurait

$$AOC : A'O'e' :: AC : A'e';$$

d'où il s'ensuivrait, comme ci-dessus,

$$A'O'C' : A'O'e' :: A'd' : A'e',$$

résultat encore absurde, puisque

$$A'O'C' > A'O'e', \quad A'd' < A'e'.$$

Il est évident que la réciproque de cette proposition n'a pas besoin d'une démonstration particulière, car le rapport des arcs ne peut être égal à celui des angles, sans que ce dernier soit égal à celui des arcs (1).

110. 1er *corollaire.* — Le rapport des arcs AC et A'C' étant le même que celui des angles AOC et A'O'C', il en résulte que ces arcs sont la mesure naturelle des angles; et, d'après ces notions, on dit que *la mesure d'un angle est l'arc de cercle compris entre ses côtés et décrit de son sommet comme centre.* Cette expression paraît d'abord

---

(1) Je crois devoir faire observer que cette proposition, qu'on se contentait presque d'énoncer dans les Éléments adoptés en France avant 1794, a été démontrée à peu près comme ci-dessus, dès 1760, dans ceux de Karsten, et l'était peut-être aussi dans de plus anciens ouvrages. Le moyen, d'ailleurs, s'offre de lui-même par une forme de raisonnement employée par Euclide pour un semblable passage du commensurable à l'incommensurable; et, comme je l'ai dit ailleurs (*Essais sur l'Enseignement*), lorsqu'on se borne aux propositions vraiment nécessaires des Éléments de Géométrie, il ne reste plus qu'à s'occuper de l'arrangement qui les lie le mieux les unes aux autres, les rend plus évidentes et plus faciles à retenir.

obscure, car on ne peut mesurer des grandeurs quelconques que par d'autres grandeurs de la même espèce. L'arc de cercle, étant une ligne, est hétérogène avec l'angle, qui est une surface (7); mais il faut observer que l'on sous-entend ici l'arc pris pour unité et l'angle qui correspond à cet arc, et que l'énoncé ci-dessus revient à celui-ci :

Tout angle contient autant de fois un certain angle arbitraire, pris pour unité ou pour terme de comparaison, que l'arc compris entre ses côtés, et décrit de son sommet comme centre, contient l'arc du même cercle compris entre les côtés de ce second angle et décrit de son sommet comme centre.

On voit par là que les arcs de cercle ne sont introduits que pour servir de termes de comparaison, et que, pour trouver le rapport numérique de deux angles quelconques, il faudra chercher, par le procédé du n° 101, celui de deux arcs décrits de leurs sommets comme centres, avec un rayon arbitraire, mais le même pour tous deux.

L'angle qui paraît le plus propre à servir d'unité est l'angle droit. Cet angle comprend évidemment entre ses côtés le quart de la circonférence; car, si du point O comme centre (*fig.* 62) on décrit une circonférence, la droite AB en sous-tendra la moitié (97); les deux angles droits COA, COB étant égaux, comprendront chacun la moitié de cette moitié (numéro précédent), c'est-à-dire le quart de la circonférence entière. On aura donc la mesure d'un angle en comparant l'arc compris entre ses côtés avec celui qu'intercepte, sur la même circonférence, l'angle droit ayant son sommet au centre.

111. 2ᵉ *corollaire.* — Il suit encore du théorème précédent, que les droites qui divisent un arc en plusieurs parties égales divisent aussi dans un même nombre de parties égales l'angle que mesure cet arc; et que, par conséquent, la division d'un angle se réduit à celle de l'arc qui lui sert de mesure. Malheureusement la Géométrie élémentaire ne fournit que le moyen de diviser un arc en deux parties égales.

Ce moyen consiste (107) à élever une perpendiculaire CO (*fig.* 58) sur le milieu de la corde AB; et cette perpendiculaire divisera aussi l'angle AOB en deux parties égales. On peut d'ailleurs se convaincre à priori de l'égalité des angles AOD et BOD par celle des triangles de même dénomination.

On pourra, par le même moyen, diviser de nouveau chaque moitié de l'arc ACB ou de l'angle AOB en deux parties égales, et pousser ainsi la division suivant les nombres 2, 4, 8, 16, 32, 64, etc.; mais il ne sera pas possible de partager cet arc ou cet angle en 3, 5, etc., parties égales.

THÉORÈME.

112. *Lorsqu'un angle a son sommet placé sur la circonférence d'un cercle, il a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

Démonstration. — 1°. Je suppose que l'angle proposé soit BAC, dont l'un des côtés AC passe par le centre O du cercle (*fig.* 63). Si, par ce point, on mène le diamètre DE parallèle à AB, on fera l'angle DOC égal à BAC comme correspondant par rapport à la sécante AC, et ayant pour mesure l'arc DC compris entre ses côtés et décrit de son sommet comme centre. Ainsi l'arc DC serait la mesure de l'angle BAC, si le sommet A de ce dernier était transporté en O; mais d'abord l'arc DC est égal à l'arc AE, puisque celui-ci mesure l'angle AOE opposé par le sommet à DOC, et qui lui est par conséquent égal; puis les arcs AE et BD étant compris entre des cordes parallèles (108), il s'ensuit que l'arc DC est aussi égal à BD. Donc l'arc BC, composé de BD et de DC, contient deux fois l'arc DC; donc il est le double de la mesure de l'angle BAC.

2°. Soit maintenant l'angle BAG comprenant le centre entre ses côtés. Cet angle, étant composé des angles BAC, CAG, aura pour mesure la somme des arcs qui mesurent ces derniers; mais comme ils ont chacun un côté qui passe par le centre, leurs mesures respectives seront la moitié de BC et la moitié de CG, arcs dont la somme compose la moitié de l'arc BG égal à BC + CG : l'angle BAG aura donc pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.

3°. L'angle FAB, qui ne comprend point le centre entre ses côtés, pouvant être considéré comme la différence des angles FAC, BAC, aura pour mesure la différence des arcs qui mesurent ces derniers: mais comme leur côté commun AC passe par le centre, leurs mesures respectives sont les moitiés de FC et de BC; et la différence de ces mesures composant la moitié de l'arc FB, égal à FC — BC, l'angle FAB aura donc pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.

4°. L'angle formé par une tangente et par une corde a aussi pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés; car l'angle CAH, formé par la tangente AH et le diamètre AC qui lui est perpendiculaire, étant droit, a pour mesure la moitié de la demi-circonférence ABC (110). Si l'on ajoute à cet angle l'angle CAG formé par deux cordes, et ayant pour mesure la moitié de l'arc CG, l'angle total GAH aura pour mesure la moitié de CG, plus celle de ABC, ce qui fait la moitié de l'arc total ABG compris entre ses côtés; et si l'on retranche du même angle droit CAH l'angle FAC, mesuré par la moitié de l'arc FC, la différence FAH de ces angles sera mesurée par celle des moitiés de ABC et de FC: ce qui revient à la moitié de AF.

113. 1er *corollaire*. — L'angle FAI, formé par la corde AF et par le prolongement AI de la corde AG, a pour mesure la moitié de la somme des arcs AF et AG sous-

tendus par ces cordes, en dehors de l'angle qu'elles comprennent.

En effet, l'angle FAI, égal à deux droits moins l'angle FAG (11), aura pour mesure la différence qu'il y a entre la demi-circonférence et la moitié de l'arc FG qui mesure l'angle FAG; mais cette différence est égale à la moitié de celle de la circonférence entière et de l'arc FG lui-même, ce qui revient évidemment à la moitié de la somme des arcs AF et AG.

114. 2ᵉ *corollaire.* — Il suit encore du théorème précédent : 1°. Que tous les angles qui, comme DEF, EGF, EHF, EIF (*fig.* 64), ont leur sommet placé à la circonférence et s'appuient sur le même arc, sont égaux, puisqu'ils ont pour mesure la moitié du même arc EAF compris entre leurs côtés;

2°. Que l'angle BAC, dont le sommet est sur la circonférence et dont les côtés AB et AC passent par les extrémités d'un diamètre BC, est droit, puisqu'il a pour mesure la moitié de la demi-circonférence BGC comprise entre ses côtés, ou le quart de la circonférence entière (110).

THÉORÈME.

115. *L'angle* BAC (fig. 65) *dont le sommet est placé dans le cercle, entre le centre et la circonférence, a pour mesure la moitié de l'arc* BC *compris entre ses côtés, plus la moitié de l'arc* ED *compris entre leurs prolongements.*

Démonstration. — Si, par le point D, on mène la corde DF parallèle au côté AC de l'angle proposé, on formera l'angle BDF égal à l'angle BAC comme correspondant par rapport à la sécante BD, et ayant pour mesure la moitié de l'arc BCF compris entre ses côtés, puisque son sommet est placé sur la circonférence (112); mais les arcs ED et FC étant égaux comme compris entre des cordes parallèles (108), il s'ensuit que l'arc BF, égal à BC + FC, sera aussi égal à BC + ED; et puisque sa moitié mesure l'angle BDF et, par conséquent, son égal BAC, ce dernier aura aussi pour mesure la moitié de la somme des arcs BC et ED, somme équivalente à l'arc BF; ce qui est l'énoncé du théorème.

THÉORÈME.

116. *L'angle* BAC (fig. 66) *dont le sommet est placé hors du cercle, a pour mesure la moitié de la différence des arcs* BC *et* ED *compris entre ses côtés, arcs dont l'un tourne sa concavité vers le sommet, et l'autre sa convexité.*

Démonstration. — En tirant, comme ci-dessus, par le point D la droite DF parallèle au côté AC, on formera l'angle BDF égal à BAC comme correspondant par rapport à la sécante AB, et ayant pour mesure la moitié de l'arc BF compris entre ses côtés (112); mais, les arcs ED et FC étant égaux comme compris entre des cordes parallèles (108), il s'ensuit que l'arc BF, égal à BC — FC, sera aussi égal à BC — ED; et puisque sa moitié mesure l'angle BDF, et, par conséquent, son égal BAC, ce dernier aura aussi pour mesure la moitié de la différence des arcs BC et ED, différence équivalente à l'arc BF; ce qui est l'énoncé du théorème.

PROBLÈME.

117. *Élever une perpendiculaire à l'extrémité* A *d'une ligne droite* AB (fig. 64), *sans la prolonger comme l'exigerait le procédé du n°* 30.

Solution. — On prendra hors de la ligne AB un point quelconque O, duquel, comme centre et avec un rayon égal à AO, on décrira une circonférence de cercle BAH; par le point B, où elle rencontrera la droite AB, et par le centre O, on tirera le diamètre BOC, qui déterminera sur la circonférence un point C : la droite AC, qui joint ce point à l'extrémité A de la droite AB, sera la perpendiculaire demandée, puisque l'angle BAC sera droit (114).

PROBLÈME.

118. *D'un point donné* A, *hors d'un cercle* (fig. 67), *mener une tangente à ce cercle.*

Solution. — On joindra avec le point A le point O, centre du cercle donné, et l'on décrira sur AO, comme diamètre, une circonférence de cercle qui rencontrera le cercle BDB′ en deux points B et B′; les droites BA et B′A, qui joindront ces points avec le point donné A, seront tangentes au cercle BDB′.

En effet, si l'on tire dans ce cercle les rayons BO et B′O qui, dans le cercle BB′A seront des cordes, les angles OBA et OB′A seront droits, puisque leur sommet est sur la circonférence de ce dernier, et que leurs côtés passent par les extrémités de l'un de ses diamètres (114) : donc les droites AB et AB′ seront tangentes au cercle BDB′ (103).

PROBLÈME.

119. *Par trois points* A, B, C (fig. 68), *qui ne sont pas en ligne droite, faire passer une circonférence de cercle.*

Solution. — Si l'on joint les trois points A, B, C par deux lignes droites AB et BC, ces droites seront des cordes du cercle qui passe par les points proposés. Élevant sur le milieu de AB la perpendiculaire DE, et sur le milieu de BC la perpendiculaire FG, le centre O, qui doit être en même temps sur l'une et sur l'autre de ces perpendiculaires (105), ne pourra se trouver qu'à leur intersection, qui aura nécessairement lieu (47).

120. 1^er^ *corollaire.* — La construction précédente ne donne qu'un seul point pour centre et qu'un seul rayon, puisque les droites AO et OC, étant égales à OB comme obliques qui s'écartent également des perpendiculaires OD et OF, seront égales entre elles : il est donc évident qu'il n'y a qu'un seul cercle qui puisse, en effet, passer par les trois points A, B, C.

La question devient insoluble lorsque les trois points A, B, C sont sur la même ligne droite, parce que les perpendiculaires DE et GF sont parallèles (39), et, ne se rencontrant plus, n'indiquent plus aucun centre. Et, en effet, aucun cercle ne peut passer par les points proposés, puisque, s'il en passait un, ce cercle aurait trois points communs avec une droite, ce qui serait contraire à ce qui a été prouvé dans le nº 94.

121. 2e *corollaire.* — Il suit encore de la même proposition, que deux cercles ne peuvent avoir trois points communs sans se confondre; car si l'on fait sur ces trois points la construction indiquée dans le problème ci-dessus, on trouvera que les cercles proposés doivent avoir le même rayon et leurs centres placés au même point.

C'est pour cette raison que deux cercles ne peuvent se rencontrer en plus de deux points.

THÉORÈME.

122. *Deux cercles qui passent par un même point de la droite qui joint leurs centres n'ont que ce point de commun, dans lequel ils se touchent par conséquent; et réciproquement, si deux cercles se touchent, leurs centres et le point de contact sont en ligne droite.*

Démonstration. — 1°. Si les centres O et O′ des cercles AC et AC′ (*fig.* 69) sont situés tous deux du même côté du point A commun à ces deux cercles sur la droite OO′, et qu'on prenne un point quelconque M′ sur celui des deux qui a le plus grand rayon, en joignant ce point avec les centres O et O′, on formera un triangle O′OM′ dans lequel on aura toujours

$$OO' + OM' > O'M' \quad \text{ou} \quad O'A;$$

mais puisque $O'A = OO' + OA$, on en conclura

$$OO' + OM' > OO' + OA,$$

et, par conséquent, $OM' > OA$: le point M' sera donc, dans tous les cas, hors du cercle AC.

2°. Si les centres sont de différents côtés du point A, en O et O'' par exemple, le triangle $OM''O''$ donnant $OM'' + O''M'' > OO''$ ou $OA + O''A$, on en conclura

$$OM'' > OA,$$

puisque $O''M'' = O''A$; et, par conséquent, le point M'' sera hors du cercle AC.

La proposition inverse, comprise dans l'énoncé, se démontre en observant : 1°. Que si les deux cercles AC et AC′ n'ont que le point A de commun, et que leurs centres, au lieu d'être sur la droite OA, soient sur toute autre droite $O'M'$, en sorte que le centre du petit cercle se trouve en o. on aura

$$O'o + oA > O'A, \quad \text{ou} \quad O'M';$$

retranchant de part et d'autre $O'o$, il restera

$$oA > oM',$$

ce qui est absurde, puisque oA, étant supposé rayon du petit cercle AC, est égal à om, nécessairement moindre que oM'.

2°. Que si les deux cercles se touchent extérieurement comme AC et AC″, il est évident que la plus courte ligne que l'on puisse mener du centre de l'un à celui de l'autre est égale à la somme des rayons, et que cette plus courte ligne passe par le point de contact, puisque si l'on joignait le point M'' à chacun des centres, la somme des droites OM'', $O''M''$ serait plus grande que celle des rayons; mais la plus courte ligne que l'on puisse mener par deux points étant droite, la ligne OAO'' sera donc une droite.

123. *Remarque.* — J'ai déjà indiqué, dans le n° **22**, les conditions qui doivent avoir lieu pour que deux cercles se coupent : elles sont vérifiées de nouveau par le théorème précédent; car on voit bien évidemment que les cercles AC et AC′ cesseraient de se toucher, et, à plus forte raison, ne se couperaient pas, si la distance des centres OO′ était moindre que la différence des rayons, et que si la distance OO″ surpassait la somme des rayons des cercles AC, AC″, ceux-ci ne se toucheraient pas non plus.

Puisque les cercles AC, AC′, AC″ ont leur centre et leur point de contact A sur la même ligne droite, la perpendiculaire AB, élevée sur cette ligne par le point A, les touche tous à la fois (103).

De plus, il est visible que, quoiqu'on ne puisse mener aucune droite entre le cercle AC et sa tangente AB, on peut néanmoins y faire passer une infinité de cercles différents (1).

PROBLÈME.

124. *Décrire un cercle qui touche en un point donné* A (fig. 70) *une droite* AB *donnée de position, et qui passe par un second point donné* C.

Solution. — On élèvera sur AB, par le point A, la perpendiculaire AO′; puis joignant les points A et C, on élèvera aussi sur le milieu de AC la perpendiculaire DO′: le point O′, où se rencontrent ces deux perpendiculaires, sera le centre du cercle demandé.

---

(1) C'est là ce qu'il faut entendre dans cette proposition, soutenue par plusieurs géomètres, que l'angle de *contingence* CAB, formé par le cercle et la tangente, est moindre que tout angle rectiligne ou formé par deux droites, quelque petit que soit ce dernier. La discussion ouverte à cet égard n'est venue que de ce qu'on ne s'entendait pas sur le sens qu'on attachait dans ce cas au mot *angle*. Ceux qui voulaient y appliquer la notion tirée des lignes droites, voyant dans l'angle de contingence un espace indéfini CAB, compris entre le cercle AC et sa tangente AB, ne pouvaient, avec raison, le regarder comme moindre que tout angle rectiligne, puisqu'on peut évidemment tirer par le point A une droite qui passe entre les points C et B. Mais toute cette dispute, qui ne roulait que sur les mots, tomba dans l'oubli dès qu'on s'aperçut qu'elle n'intéressait en rien les principes.

En effet, le centre de ce cercle doit se trouver sur la droite AO′, perpendiculaire à la tangente AB, et passant par le point A, où doit avoir lieu le contact du cercle et de la droite AB (103); il doit être pareillement sur DO′, puisque cette ligne est perpendiculaire sur le milieu de la droite AC qui, joignant deux points A et C du cercle demandé, en est une corde (105) : donc il est au point O′, où ces deux perpendiculaires se rencontrent.

PROBLÈME.

125. *Décrire un cercle qui touche en un point donné* A *un autre cercle donné* AE, *et qui passe par un second point donné* C.

Solution. — On joindra, comme dans le problème précédent, les points A et C et la perpendiculaire DO′, élevée sur le milieu de la corde AC, passera par le centre du cercle demandé; on tirera ensuite par le centre O du cercle AE, et par le point A, une droite qui devra contenir aussi le centre du cercle demandé (122) : le point O′ où cette droite prolongée, s'il est nécessaire, rencontrera la droite DO′, sera donc, dans ce cas, le centre du cercle demandé.

La construction ne changerait pas si le point donné C passait en C′ dans l'intérieur du cercle donné AE; seulement le cercle demandé serait enveloppé par celui-ci.

PROBLÈME.

126. *Décrire sur une ligne donnée* EF (fig. 64) *un cercle tel, que tous les angles ayant leur sommet à sa circonférence, placés du même côté de cette droite et s'appuyant sur ses extrémités, soient égaux à un angle donné.*

Solution. — On mènera par le point E la droite DM, faisant avec EF un angle DEF égal à l'angle donné, et dont l'ouverture soit tournée du même côté que celle des angles demandés; il ne s'agira plus que de construire, par le problème du nº 124, un cercle qui passe par le point F, et qui touche en E la droite DM.

Il est évident, par le nº 114, que tous les angles EGF, EHF, EIF, ayant même mesure que l'angle DEF, seront égaux à l'angle donné.

N. B. — On énonce aussi ce problème comme il suit : *Décrire sur une ligne droite* EF *un* segment (ou une portion) *de cercle* EHFE, capable *d'un angle donné.*

THÉORÈME.

127. *Deux sécantes qui partent d'un même point* E *pris hors d'un cercle* (fig. 71) *étant prolongées jusqu'à la partie de la circonférence la plus éloignée de ce point, sont réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures, c'est-à-dire que l'on a la proportion*

$$AE : DE :: CE : BE,$$

dans laquelle une des sécantes et sa partie extérieure forment les moyens, tandis que l'autre sécante et sa partie extérieure forment les extrêmes.

Démonstration. — En tirant les cordes AC et DB, on forme les triangles AEC et BED qui sont semblables comme ayant, chacun à chacun, deux angles égaux (65), savoir : l'angle ACD et l'angle ABD, dont le sommet est à la circonférence, et qui s'appuient sur le même arc AD (114), puis l'angle AED qui leur est commun. Comparant leurs côtés homologues, on obtiendra la proportion

$$AE : DE :: CE : BE,$$

énoncée ci-dessus.

128. *Remarque.* — Si l'on conçoit que la sécante EC tourne autour du point E en s'avançant vers F pour se dégager du cercle, les points C et D se rapprocheront sans cesse, et la différence entre cette sécante et sa partie extérieure deviendra de plus en plus petite; la proportion ci-dessus ne cessant point pour cela d'être vraie, il est naturel d'en conclure qu'elle aura encore lieu lorsque cette différence sera nulle, c'est-à-dire lorsque la ligne CE étant devenue la tangente EF, la partie extérieure sera devenue égale à la ligne entière. On aura, dans ce cas,

AE : EF :: EF : BE,

ce qui nous apprend que la tangente EF est moyenne proportionnelle entre la sécante BE et sa partie extérieure AE.

Cette proposition peut aussi se démontrer à priori comme il suit: Ayant tiré les cordes AF et BF (*fig.* 72), on a les triangles AEF et BEF, dans lesquels l'angle E est commun, et les angles EBF et EFA sont égaux, comme ayant leur sommet sur la circonférence et s'appuyant sur le même arc AF; la comparaison de leurs côtés homologues donnera

AE : EF :: EF : BE.

THÉORÈME.

129. *Deux cordes* AB *et* CD (fig. 73), *qui se rencontrent dans un cercle, se coupent en parties réciproquement proportionnelles, c'est-à-dire que l'on a*

AE : DE :: CE : BE,

proportion dans laquelle les parties d'une corde forment les extrêmes, tandis que celles de l'autre forment les moyens.

Démonstration. — En tirant les cordes AC et DB, on forme les triangles AEC et BED, qui sont semblables comme ayant deux angles égaux chacun à chacun (65), savoir : l'angle ACD et l'angle ABD, dont le sommet est placé à la circonférence, et qui s'appuient sur le même arc AD (114), puis l'angle AEC et l'angle BED opposés par le sommet. Comparant leurs côtés homologues, on aura la proportion

AE : DE :: CE : BE,

énoncée ci-dessus.

N. B. — Il est facile de reconnaître que ce théorème et celui du n° 127 ne sont que deux cas particuliers d'une même proposition, que l'on peut énoncer ainsi :

Lorsque deux droites qui se coupent rencontrent en même temps une circonférence de cercle, chacune en deux points, les distances de leur point d'intersection, à chacun de ceux où elles rencontrent cette circonférence, sont réciproquement proportionnelles.

130. *Corollaire.* — Si la corde AB passait par le centre ou devenait un diamètre, et que la corde CD lui fût perpendiculaire (*fig.* 74), cette dernière serait coupée en deux parties égales (106), et la proportion

$$AE : DE :: CE : BE$$

deviendrait

$$AE : CE :: CE : BE,$$

puisque $DE = CE$: la droite CE serait donc moyenne proportionnelle entre les parties AE et BE du diamètre AB.

Il suit de là que pour trouver une moyenne proportionnelle entre deux droites données M et N, il faut les porter à la suite l'une de l'autre, de A en E et de E en B, puis décrire sur leur somme AB, comme diamètre, un cercle, et élever au point E, où elles se joignent, la perpendiculaire EC, qui sera la moyenne proportionnelle demandée.

131. *Remarque.* — La proposition qui fait le sujet du corollaire précédent résulte immédiatement de la propriété du triangle rectangle démontrée dans le n° 74; car si l'on mène les cordes AC et CB, l'angle ACB étant droit (114), on aura, par le numéro cité,

$$AE : CE :: CE : BE.$$

Le même numéro donne encore cette proportion,

$$AE : AC :: AC : AB,$$

de laquelle il résulte que la corde menée par l'extrémité d'un diamètre est moyenne proportionnelle entre le diamètre et le segment formé par la perpendiculaire abaissée de l'autre extrémité de cette corde.

Par là on peut aussi trouver une moyenne proportionnelle entre deux droites données, en prenant la plus grande pour le diamètre AB, portant la seconde de A en E, élevant la perpendiculaire EC, et tirant la corde AC, qui sera, d'après ce qui précède, la moyenne proportionnelle demandée.

PROBLÈME.

132. *Partager une ligne* AB (fig. 75) *en moyenne et extrême raison, c'est-à-dire de manière qu'on ait la proportion*

$$AC : BC :: BC : AB,$$

dans laquelle BC, *la plus grande des deux parties de la ligne* AB, *est moyenne proportionnelle entre cette ligne et l'autre partie* AC.

Solution. — Il faut élever à l'une des extrémités de la droite AB la perpendiculaire AE, égale à la moitié de cette droite, tirer BE du point E, comme centre, avec le rayon AE, décrire un cercle ADF, et du point B comme centre, avec un rayon égal à BD, décrire l'arc DC : cet arc, coupant la ligne AB au point C, la partagera en moyenne et extrême raison.

Pour le prouver, on prolongera BE jusqu'en F, et l'on aura, par le n° 128,

$$BD : AB :: AB : BF,$$

d'où l'on tirera

$$AB - BD : BF - AB :: BD : AB.$$

Mais

$$AB - BD = AB - BC = AC;$$

et puisque, par construction, AE est la moitié de AB, il s'ensuit que

$$AB = 2\,AE = FD,$$

d'où

$$BF - AB = BF - FD = BD = BC,$$

et, par conséquent,

$$AC : BC :: BC : AB,$$

proportion conforme à l'énoncé du problème.

PROBLÈME.

133. *Décrire un cercle qui passe par deux points donnés* C *et* D (fig. 76), *et qui touche une ligne droite indéfinie* AB *donnée de position.*

Solution. — On joindra les points C et D par une droite que l'on prolongera jusqu'à ce qu'elle rencontre AB en A; on prendra ensuite une moyenne proportionnelle entre AC et AD, par le procédé indiqué n° 131, et AE étant cette moyenne proportionnelle, on la rapportera sur AB, en décrivant du point A comme centre, avec un rayon égal à AE, l'arc EF: le point F sera celui où doit se faire le contact de la droite AB et du cercle demandé. On pourra donc décrire ce cercle suivant le procédé du n° 119, ou par celui du n° 124.

Cette solution se prouve en observant que la ligne AC est une sécante, et que la question se réduit à trouver sur AB la position du point de contact, pour lequel on doit avoir, d'après le n° 28,

$$AD : AF :: AF : AC,$$

d'où il suit que la distance AF s'obtiendra en prenant une moyenne proportionnelle entre AD et AC (1).

---

(1) Le problème du numéro précédent et celui-ci sont susceptibles de deux solutions. Dans le premier, non-seulement la ligne BD (*fig.* 75) remplit les conditions de l'énoncé, mais encore la ligne BF en tant que AB est moyenne proportionnelle entre BF et BD. (*Voyez l'Application de l'Algèbre à la Géométrie.*)

Dans le problème ci-dessus, on peut porter la ligne AE (*fig.* 76) non-seulement de A en F, mais du côté opposé, en F'; on aura un second

THÉORÈME.

134. *Lorsque des cordes* AC, AF (fig. 74) *partent de la même extrémité d'un diamètre* AB, *les secondes puissances de leurs longueurs sont proportionnelles aux segments* AE *et* AG *compris sur ce diamètre, entre l'extrémité commune à toutes ces cordes et le pied de la perpendiculaire abaissée de l'autre extrémité.*

Démonstration. — Puisque les cordes AC et AF sont respectivement moyennes proportionnelles entre le diamètre AB et chacun des segments AE et AG (131), on aura

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \times \overline{AE}, \quad \overline{AF}^2 = \overline{AB} \times \overline{AG};$$

d'où l'on conclura

$$\overline{AC}^2 : \overline{AF}^2 :: \overline{AB} \times \overline{AE} : \overline{AB} \times \overline{AG},$$

ce qui se réduit à

$$\overline{AC}^2 : \overline{AF}^2 :: AE : AG,$$

en omettant le facteur AB, commun aux deux termes du second rapport.

Des polygones inscrits et circonscrits au cercle.

135. *Remarques.* — Il est évident que puisqu'on peut toujours faire passer un cercle par trois points donnés (119), on pourra aussi faire passer un cercle par les sommets des angles d'un triangle quelconque ABC (*fig.* 77). Dans ce cas, le triangle ABC est *inscrit* au cercle, et le cercle est *circonscrit* au triangle.

---

cercle qui touchera la droite AB en F', et qui passera par les points D et C.

Si la ligne DC devenait parallèle à AB, la construction indiquée ne ferait plus connaître le point F; mais il est visible que, dans ce cas, la perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde DC, et qui passe par le centre du cercle demandé, devenant perpendiculaire à la tangente AB, déterminerait le point de contact F (103).

Cette propriété du triangle met en évidence celles qui ont été démontrées dans les nos 36, 37 et 51. 1°. On voit que la somme des trois angles du triangle est égale à deux droits; car chacun d'eux a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés, et la réunion de ces trois moitiés, composant la demi-circonférence, est la mesure de deux angles droits (110).

2°. L'égalité de deux angles, A et B, entraîne celle des arcs opposés, CB et AC, respectivement doubles de ceux qui mesurent ces angles (112) : les cordes des arcs CB et AC, qui ne sont autre chose que les côtés opposés aux angles A et B, seront donc égales (99). La réciproque de cette proposition se prouverait aussi facilement.

3°. Enfin, le plus grand arc, lorsqu'il est moindre qu'une demi-circonférence, étant toujours sous-tendu par la plus grande corde, il s'ensuit évidemment qu'au plus grand des angles du triangle est opposé le plus grand de ses côtés.

PROBLÈME.

136. *Inscrire un cercle dans un triangle donné* ABC (fig. 78), *c'est-à-dire décrire dans l'intérieur de ce triangle un cercle qui ne fasse qu'en toucher les trois côtés.*

Solution. — On divisera en deux parties égales deux quelconques des angles de ce triangle (111), A et B par exemple; le point de rencontre O, des droites AO et BO qui feront cette division, sera le centre du cercle demandé.

En effet, si l'on abaisse du point O une perpendiculaire sur chacun des côtés AB, AC, BC, les triangles AEO, ADO seront égaux (34), ainsi que les triangles DOB et BOF (34). Les deux premiers étant rectangles, l'un en D, l'autre en E, auront de plus les angles EAO, DAO égaux comme moitiés du même angle DAE, et le côté AO commun; il en sera de même des deux derniers qui sont rectangles, l'un en D, l'autre en F, dans lesquels les angles

DBO, FBO sont égaux comme moitiés d'un même angle DBF, et le côté BO est commun : les deux perpendiculaires EO et FO sont donc égales à DO, et, par conséquent, le cercle décrit du point O comme centre, avec un rayon égal à DO, ne fera que toucher chacun des côtés du triangle ABC.

Comme on n'a fait usage que des angles A et B, il faut encore prouver qu'en combinant, avec l'un de ceux-ci, l'angle C, on trouverait toujours le même point O. Pour cela, on joint le point O et le troisième angle C par la droite OC; l'égalité des triangles CEO, CFO, rectangles l'un en E, l'autre en F, ayant les côtés EO et FO égaux entre eux, et le côté CO commun (34), prouve que la droite CO divise aussi l'angle C en deux parties égales.

137. *Remarque.* — Puisque par trois points on ne peut faire passer qu'une circonférence de cercle, il est évident que si l'on prenait au hasard un quatrième point D (*fig.* 77), ce point pourrait tomber hors du cercle ABC, et alors il serait impossible d'inscrire dans un cercle le quadrilatère ACDB; à plus forte raison, doit-il y avoir des exceptions pour les polygones dont le nombre des côtés surpasse 4 (1).

THÉORÈME.

138. *Tout polygone d'un nombre quelconque de côtés, lorsqu'il est régulier, c'est-à-dire lorsqu'il a tous ses angles égaux et tous ses côtés égaux, peut être inscrit et circonscrit au cercle.*

Démonstration. — Soit le polygone ABCDEF (*fig.* 79) dont on suppose tous les angles ABC, BCD, CDE, etc.,

(1) Il est visible, par la seule inspection de la figure, que tous les quadrilatères tels que ACEB, dans lesquels la somme des angles opposés E et A est égale à deux droits (112), peuvent être inscrits au cercle, tandis que dans ACDB cette somme surpasse deux droits pour les angles C et B, et se trouve moindre pour A et D (116).

égaux entre eux, ainsi que tous les côtés AB, BC, CD, etc.

1°. Le cercle qui passera par les sommets A, B, C, de trois quelconques des angles de ce polygone, passera par tous les autres; car si l'on mène, du centre O du cercle ABC, les droites AO, BO, CO, DO, etc., les trois premières seront, par construction, rayons de ce cercle, et, par conséquent, égales : les triangles isocèles AOB et BOC seront aussi égaux comme ayant leurs côtés égaux chacun à chacun, puisque, par hypothèse, BC = AB; les angles ABO et CBO étant égaux, chacun d'eux sera la moitié de l'angle ABC du polygone : l'angle BCO, qui leur est égal, sera donc aussi la moitié de l'angle BCD égal à ABC par hypothèse; OCD sera l'autre moitié, et sera, par conséquent, égal à BCO. Cela posé, CD étant, par l'hypothèse, égal à CB, les triangles BCO et OCD auront, chacun à chacun, un angle égal compris entre deux côtés égaux, seront égaux (16) et donneront OD = OC; ainsi le point D sera sur la circonférence du cercle ABC. On démontrerait de la même manière que le point E et tous ceux qui le suivent s'y trouvent aussi.

2°. Si l'on abaisse du point O, centre du cercle circonscrit, et aussi du polygone inscrit ABCDEF, une perpendiculaire OG sur l'un quelconque AB des côtés de ce polygone, le cercle GH décrit du point O comme centre, avec le rayon OG, et touchant, en vertu de sa construction, le côté AB au point G, touchera aussi chacun des autres dans leur milieu; car si du point O on abaisse sur le côté BC, consécutif à AB, la perpendiculaire OH, les triangles OBG et OBH, rectangles l'un en G, l'autre en H, ayant de plus l'angle GBO égal à OBH, et l'hypoténuse OB commune, seront égaux (34); ils donneront, par conséquent, OG = OH : le cercle GH touchera donc BC en H, point qui est le milieu de BC, puisque les obliques OB et OC sont égales. Le même raisonnement fera voir que ce cercle touche pareillement chacun des autres côtés.

139. *Remarque.* — Les angles AOB, BOC, COD, etc., formés par les rayons menés du centre O du polygone à chacun de ses angles, se nomment *angles au centre*, pour les distinguer des *angles à la circonférence*, ABC, BCD, CDE, etc. Tous les angles au centre d'un même polygone régulier sont égaux, et leur somme étant équivalente à quatre droits (13), chacun d'eux est égal à cette somme, divisée par le nombre des angles ou des côtés du polygone proposé (1).

THÉORÈME.

140. *Les polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables, et leurs contours sont entre eux comme les rayons des cercles auxquels ils sont inscrits ou circonscrits.*

Démonstration. — 1°. Ces polygones ont leurs angles égaux chacun à chacun; les côtés du premier étant égaux entre eux et ceux du second étant aussi égaux entre eux, les uns et les autres sont tous dans le même rapport, et, par conséquent, proportionnels entre eux : les polygones sont donc semblables (87).

2°. Les angles AOB et *aob* étant égaux, et les triangles AOB et *aob* étant d'ailleurs isocèles, seront semblables (66) : ils donneront

$$AB : ab :: AO : ao;$$

et les contours des polygones ABCDEF, *abcdef* étant entre eux comme leurs côtés homologues AB et *ab* (93), seront, d'après cette proportion, dans le rapport des rayons AO et *ao* des cercles dans lesquels ces polygones sont inscrits.

La similitude des triangles AGO et *ago*, rectangles

(1) Il ne s'agit ici que des polygones dont le périmètre est terminé dans la circonférence du cercle; mais l'opération indiquée à la fin de la note de la page 65 peut en produire qui ne se formeront qu'après avoir parcouru cette circonférence un nombre de fois aussi grand qu'on le voudra.

l'un en G et l'autre en g, est évidente à cause de l'égalité des angles BAO et bao, et donne

$$AO : ao :: OG : og,$$

d'où l'on conclut

$$AB : ab :: OG : og.$$

Il en résulte, par conséquent, que les contours des deux polygones proposés étant proportionnels à leurs côtés homologues AB et ab, le seront aussi aux rayons OG et og des cercles auxquels ils sont circonscrits.

PROBLÈME.

141. *Un polygone d'un nombre quelconque de côtés étant inscrit au cercle, inscrire dans le même cercle un second polygone d'un nombre de côtés double de celui des côtés du premier, et trouver la valeur de l'un des côtés du second.*

Solution. — Soit AB (*fig.* 80) l'un des côtés du premier polygone, et AOB l'angle au centre de ce polygone; on divisera cet angle ou l'arc AB'B qui le mesure, en deux parties égales (111) au point B'; et les droites AB' et B'B, égales entre elles, seront évidemment deux côtés contigus du nouveau polygone.

Pour trouver la valeur de AB', il faut prolonger le rayon B'O jusqu'en D; on aura alors (131)

$$\overline{AB'}^2 = \overline{B'D} \times \overline{B'E};$$

mais comme $B'E = B'O - EO$, que dans le triangle AEO, rectangle en E, le côté $EO = \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{AE}^2}$, et que $AE = \frac{1}{2} AB$, $B'O = AO$, $B'D = 2\,AO$, on en conclura

$$B'E = AO - \sqrt{\overline{AO}^2 - (\tfrac{1}{2} AB)^2},$$

$$\overline{AB'}^2 = 2\,AO\left[AO - \sqrt{\overline{AO}^2 - (\tfrac{1}{2} AB)^2}\right].$$

Si l'on prend pour mesure commune ou pour unité le rayon AO du cercle dans lequel sont inscrits les polygones proposés, on aura AO = 1, et il viendra

$$\overline{AB'}^2 = 2\left[1 - \sqrt{1 - (\tfrac{1}{2}AB)^2}\right].$$

Si l'on partageait au point B″ l'arc AB′ en deux parties égales, on aurait de même

$$\overline{AB''}^2 = 2\left[1 - \sqrt{1 - (\tfrac{1}{2}AB')^2}\right],$$

pour le côté du polygone qui en contient le double de celui qui le précède; et ainsi de suite.

142. Le plus simple des polygones réguliers, après le triangle équilatéral, est le quadrilatère dont les angles et les côtés sont égaux. Ce polygone se nomme *carré*.

La somme de ses quatre angles intérieurs valant, d'après le nº **82**, quatre angles droits, et tous étant égaux, chacun d'eux sera droit; ainsi le carré ABCD (*fig.* 81) a ses quatre côtés AB, BC, CD, AD égaux, et ses quatre angles A, B, C, D droits.

143. *Remarques.* — Le carré est évidemment un parallélogramme (79) qui a ses quatre angles égaux, et ses quatre côtés égaux; il ne faut pas le confondre avec le parallélogramme qui n'a que ses côtés égaux, et dont les angles sont inégaux : ce dernier, dont la *fig.* 82 représente un cas, se nomme *rhombe* ou *losange*.

Quand les côtés contigus sont inégaux, mais que les angles demeurent droits, le parallélogramme étant rectangle se nomme simplement *rectangle :* ABCD (*fig.* 83) est un rectangle.

Il est visible que tout rectangle peut s'inscrire dans un cercle; car les diagonales AC et BD, étant égales dans ce cas, se couperont en un point O également éloigné des points A, B, C, D, puisqu'en général AO = OC, DO = OB (80); et, par conséquent, ces points se trouveront sur la circonférence du cercle décrit du point O comme centre, avec un rayon égal à AO

PROBLÈME.

144. *Construire un carré sur une ligne donnée* AB (fig. 81).

Solution. — Il faut élever sur les extrémités A et B de cette droite deux perpendiculaires AD et BC, que l'on fera égales à AB; joignant leurs extrémités C et D par une droite, on aura le carré demandé ABCD.

En effet, les côtés AD et BC étant parallèles et égaux, il en sera de même des côtés DC et AB (54) : les angles ADC et BAD, internes d'un même côté, valant ensemble deux droits (47), et le second étant lui-même droit par construction, le premier sera droit aussi; on prouvera la même chose pour BCD, en le comparant avec ABC.

PROBLÈME.

145. *Inscrire dans un cercle les polygones de* 4, 8, 16, 32, 64, *etc., côtés.*

Solution. — La question se réduit à inscrire d'abord celui de quatre côtés, puisque les autres se formeront par son moyen, d'après le n° 141.

Pour inscrire dans le cercle ABCD (*fig.* 84) un carré, il faut, perpendiculairement à un diamètre quelconque AC, en élever un autre BD, ce qui déterminera sur la circonférence quatre points A, B, C, D, lesquels, étant joints par des droites, formeront le carré demandé.

En effet, les angles ABC, BCD, etc., sont tous droits (114), et les côtés AB, BC, CD, AD sont égaux comme étant les hypoténuses des triangles rectangles AOB, BOC, COD, DOA, visiblement égaux entre eux (16).

Le triangle rectangle AOB donnant

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 = 2\,\overline{AO}^2,$$

puisque AO = BO, on en conclura

$$AB = AO\sqrt{2};$$

et en prenant le rayon AO pour unité, il viendra seulement

$$AB = \sqrt{2}\ (1).$$

Si l'on substitue cette valeur dans celle de AB′ (141),

---

(1) Le procédé pour obtenir AB étant rigoureux, il s'ensuit que la Géométrie donne exactement la grandeur de l'incommensurable $\sqrt{2}$, que l'on ne peut obtenir que par approximation avec le secours des nombres : mais il faut observer qu'alors le nombre cherché n'est que l'expression du rapport de AB avec AO ; et s'il était possible d'effectuer avec une exactitude rigoureuse, sur ces lignes, l'opération indiquée dans le n° 8, elle ne finirait jamais ; car aucune droite, quelque petite qu'elle soit, ne peut les mesurer en même temps l'une et l'autre.

Cette incommensurabilité de la diagonale avec le côté du carré, à laquelle, par une exagération assez singulière, Platon (*des Lois,* livre VII, vers la fin) attachait une importance telle, qu'il regardait comme indigne du nom d'homme celui qui l'ignorait, se trouve démontrée à la fin du dixième livre des *Éléments* d'Euclide, et dans plusieurs des traités modernes.

Voici comment John Leslie l'établit, en terminant le v[e] livre de ses *Elements of Geometry :*

Soit ABC (*fig.* 84*) un triangle rectangle isocèle, moitié d'un carré; qu'on porte le côté AB sur la diagonale AC, de C en E, qu'on tire BE, et que, par le point E, on mène EF perpendiculaire sur AC, on verra que le triangle BEF est isocèle; car si des angles droits CBF et CEF on retranche les angles égaux CBE et CEB du triangle BEC, isocèle par construction, il reste les angles EBF et FEB égaux : donc EF = BF. De plus, l'angle BAC ou FAE étant la moitié d'un droit, il en est de même de l'angle AFE : donc le triangle AEF est isocèle; par conséquent EF = AE, et est < AF. Ainsi l'*excès* AE *de la diagonale* AC *sur le côté* AB *est contenu dans ce côté deux fois avec un reste.*

Soit AH ce reste ; comme il est dans le triangle rectangle et isocèle AEF ce qu'est AE dans le triangle ABC, il sera donc contenu dans AE deux fois avec un reste. Soit AL ce nouveau reste, et AHI le triangle rectangle et isocèle construit sur AH comme côté ; le reste AL sera de même contenu dans AH deux fois avec un reste, et ainsi de suite, sans que jamais l'opération puisse être terminée, quoique les restes aillent toujours en décroissant : donc AC et AB n'ont point de commune mesure.

La suite des égalités

$$\begin{aligned} AC &= AB + AE,\\ AB &= 2\,AE + AH,\\ AE &= 2\,AH + AL,\\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

fournit des approximations du rapport de AC avec AB, d'autant plus puis cette dernière dans celle de AB″, et ainsi de suite, on aura successivement la longueur des côtés des polygones de 8, 16, etc., côtés, rapportée à celle du rayon du cercle.

PROBLÈME.

146. *Inscrire dans un cercle les polygones de* 3, 6, 12, 24, 48, *etc., côtés.*

Solution. — Le côté de l'hexagone régulier s'offre le

---

exactes qu'on la pousse plus loin ou que le reste qu'on néglige est plus petit. Si c'est au reste AL que l'on s'arrête, on trouvera

$$AH = 2\,AL, \quad \text{d'où} \quad AB = 12\,AL, \quad AC = 17\,AL \quad \text{et} \quad \frac{AC}{AB} = \frac{17}{12}.$$

Cette même suite conduit à une fraction continue d'une forme très-remarquable. On a d'abord

$$\frac{AC}{AB} = 1 + \frac{AE}{AB};$$

puis on obtient

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AE}{2\,AE + AH} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{AH}{AE}},$$

$$\frac{AH}{AE} = \frac{AH}{2\,AH + AL} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{AL}{AH}},$$

etc.,

en divisant les deux termes de la seconde fraction de chaque ligne par le numérateur de cette fraction.

De là on conclut facilement que

$$\frac{AC}{AB} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{AH}{AE}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{AL}{AH}}},$$

et, en général,

$$\frac{AC}{AB} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}},$$

expression qui ne saurait jamais s'arrêter, mais qui, par le procédé indiqué en *Arithmétique*, donne les approximations successives

$$\frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \text{etc.},$$

et qu'on trouve aussi dans le *Complément des Éléments d'Algèbre*.

premier; il est égal au rayon du cercle circonscrit. En effet, dans ce polygone, l'angle au centre AOB (*fig.* 85) étant la sixième partie de quatre droits, est égal à $\frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$ d'un seul; retranchant cette quantité de deux droits, il reste $2 - \frac{2}{3}$ ou les $\frac{4}{3}$ d'un droit pour les deux autres angles BAO, ABO, égaux d'ailleurs entre eux, ce qui fait encore $\frac{2}{3}$ d'angle droit pour chacun : le triangle ABO ayant ses trois angles égaux sera nécessairement équilatéral (37), et donnera, par conséquent, $AB = AO$.

On inscrira donc un hexagone dans un cercle en portant le rayon du cercle six fois sur sa circonférence, et en joignant par des droites les points de division consécutifs. En prenant $AO = 1$, on aura $AB = 1$, et l'on s'élèvera, par le moyen de cette valeur et des formules du n° 141, aux valeurs des côtés des polygones inscrits, de 12, 24, 48, etc., côtés.

Pour parvenir à la valeur du côté du triangle équilatéral inscrit ACE, il suffit d'observer que ce triangle se forme en joignant par des droites les angles de l'hexagone pris de deux en deux, et que le triangle ACD, rectangle en C (114), donne

$$AC = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{CD}^2} = \sqrt{(2\,AO)^2 - \overline{AO}^2} = AO\sqrt{3};$$

et, en faisant $AO = 1$, il viendra

$$AC = \sqrt{3}.$$

PROBLÈME.

147. *Inscrire dans un cercle les polygones de* 5, 10, 20, 40, *etc., côtés.*

Solution. — On trouve premièrement le côté du polygone qui en a dix, ou du décagone, en prenant le plus grand des deux segments du rayon partagé en moyenne et extrême raison (132).

En effet, dans ce polygone, l'angle au centre AOB (*fig.* 86) est la dixième partie de quatre droits ou les $\frac{2}{5}$ d'un seul; il reste, pour les angles ABO et BAO, $2 - \frac{2}{5}$ d'angle droit ou $\frac{8}{5}$, ce qui donne $\frac{4}{5}$ pour chacun : l'angle BAO est donc double de l'angle AOB. Si l'on mène AG, qui fasse avec AB l'angle BAG égal à AOB, les deux triangles ABG et ABO, ayant encore un angle commun B, seront semblables (65) et donneront

$$BG : AB :: AG : AO;$$

or, le triangle ABO étant isocèle, le triangle ABG le sera pareillement : on aura donc

$$AG = AB.$$

De plus, l'angle BAG, étant égal à AOB, sera la moitié de BAO; l'autre moitié GAO sera, par conséquent, égale à AOB, ce qui donnera (37)

$$GO = AG = AB;$$

et la proportion précédente, devenant alors

$$BG : GO :: GO : BO,$$

montre que le rayon BO est en effet partagé, au point G, en moyenne et extrême raison, et que AB est égal au plus grand des deux segments.

Si l'on joint par des droites les angles du décagone, pris de deux en deux, on aura le pentagone. Je ne m'arrêterai pas à calculer le côté du décagone, parce que cette recherche est plus curieuse qu'utile.

118. *Remarque.* — On a dû s'apercevoir facilement que l'inscription des polygones dans le cercle revenait à la division de la circonférence en un certain nombre de parties égales. Les procédés indiqués pour inscrire les polygones de 4, 8, 16, 32, etc., côtés, ceux de 3, 6, 12, 24, etc., ceux de 5, 10, 20, 40, etc., serviront à diviser la circonférence d'un cercle, suivant les nombres de ces diverses progressions.

Il est à propos de remarquer que l'on peut aussi la diviser suivant la progression 15, 30, 60, etc., parce que le polygone de six côtés donnant la sixième partie de la circonférence, et celui de dix en donnant la dixième partie, la différence des arcs sous-tendus par les côtés de ces polygones sera égale à $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$ de la circonférence, ce qui revient à $\frac{1}{15}$. En portant donc de A en H le rayon du cercle, l'arc BH sera cette 15ᵉ partie, et sa corde sera le côté du polygone de 15 côtés, ou du *pentédécagone*. Au moyen de la division continuelle des arcs en deux parties égales, ou de leur *bissection*, on obtiendra les polygones de 30, 60, etc., côtés (1).

PROBLÈME.

149. ***Un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés étant inscrit dans un cercle, circonscrire à ce cercle un polygone régulier du même nombre de côtés; et réciproquement, le polygone circonscrit étant donné, construire le polygone inscrit.***

Solution. — Soit *abcde* (*fig.* 87) le polygone proposé; on tirera les rayons O*a*, O*b*, O*c*, etc., à l'extrémité desquels on élèvera les perpendiculaires AE, BA, CB, etc.: l'ensemble de ces perpendiculaires qui toucheront la circonférence du cercle *abcde* sera le polygone demandé.

En effet, les triangles *a*A*b*, *b*B*c*, *c*C*d*, etc., sont tous

(1) Ces divisions de la circonférence du cercle ne sont plus les seules que l'on puisse effectuer géométriquement. M. F. Gauss, dans un ouvrage intitulé *Disquisitiones arithmeticæ* (publié en 1801 à Leipsig, et traduit en français par M. Delisle), a prouvé que l'on peut opérer ainsi la division en 2^n+1 parties, lorsque ce nombre est premier.

En faisant successivement n égal à 0, 1, 2, on trouve les divisions en 2, 3, 5 parties; et pour obtenir de nouveau un nombre premier, il faut prendre $n=4$, d'où résulte la division en 17 parties, dont il y a aussi une démonstration particulière, mais qui n'est pas de nature à trouver place ici. Tous ces cas se ramènent à des équations du second degré. (*Voyez* le *Complément des Éléments d'Algèbre*.)

égaux et isocèles, parce que les côtés ab, bc, cd, etc., sont égaux, et que les angles Aab, Aba, Bbc, Bcb, Ccd, Cdc, etc., formés sur ces côtés, comprenant des arcs égaux ab, bc, cd, etc., sont aussi égaux (114). On aura donc:

1°. $$aAb = bBc = cCd = \ldots,$$

2°. $$aA = Ab = Bb = Bc = cC = Cd = \ldots;$$

d'où l'on conclura

$$AB = 2\,Ab, \quad BC = 2\,Bc, \quad CD = 2\,Cd = \ldots,$$

et, par conséquent,

$$AB = BC = CD = \ldots.$$

Le polygone ABCDE, ayant donc ses angles égaux ainsi que ses côtés, sera tel qu'on le demande.

On déduira le polygone inscrit du polygone circonscrit en joignant les points a, b, c, d, etc., qui sont les milieux des côtés de ce dernier, et dans lesquels il touche la circonférence.

Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que les triangles aAb, bBc, cCd, etc., sont maintenant égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, puisque les angles A, B, C, etc., sont ceux d'un polygone régulier, et que aA, Ab, bB, etc., sont les moitiés des côtés AE, AB, BC, etc., égaux entre eux. Il résulte de là que les côtés ab, bc, cd, etc., sont égaux, que les arcs qu'ils sous-tendent le sont aussi; et que, par conséquent, les angles abc, bcd, etc., dont le sommet est à la circonférence, et qui comprennent entre leurs côtés un même nombre de ces arcs, sont égaux entre eux (114). Le polygone $abcde$, ayant ses angles et ses côtés égaux, est donc le polygone inscrit demandé.

On pourrait aussi former le polygone inscrit $a'b'c'd'e'$, qui ne diffère de $abcde$ que par sa positio[n]
droites AO, BO, CO, etc., d

conscrit ABCDE au centre du cercle inscrit, et joignant les points a', b', c', etc., où ces lignes rencontrent la circonférence de ce même cercle. En effet, puisque $AO = BO$, $a'O = b'O$, on aura

$$AO : a'O :: BO : b'O;$$

par conséquent, la droite $a'b'$ sera parallèle à AB (60), et les triangles AOB, $a'Ob'$ seront semblables; il en sera de même de BOC et de $b'Oc'$, et ainsi de suite : les côtés $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$, etc., étant homologues à AB, BC, CD, etc., seront donc nécessairement égaux entre eux; et l'on prouvera, comme ci-dessus, qu'ils comprennent des angles égaux.

150. *Corollaire.* — On peut trouver, d'après ce qui précède, la valeur du côté AB du polygone circonscrit. En effet, les droites Aa et Ab étant égales (149), ainsi que Oa et Ob, la ligne AO est perpendiculaire sur le milieu, G, de ab (29), et les triangles OGa et OAa sont semblables, comme ayant chacun un angle droit, l'un en G, l'autre en a, et un angle commun en O. On tire de là

$$OG : Oa :: aG : aA,$$

ou

$$OG : Oa :: \tfrac{1}{2}ab : \tfrac{1}{2}AE,$$

puis

$$AE \text{ ou } AB = \frac{\overline{ab} \times \overline{Oa}}{\sqrt{\overline{Oa}^2 - (\frac{1}{2}ab)^2}},$$

en observant que le triangle rectangle OGa donne

$$OG = \sqrt{\overline{Oa}^2 - \overline{aG}^2} = \sqrt{\overline{Oa}^2 - (\tfrac{1}{2}ab)^2}.$$

151. *Remarque.* — Il est important d'observer qu'à mesure qu'on multiplie les côtés du polygone inscrit, son contour augmente, tandis que celui du polygone circonscrit diminue dans la même circonstance. En effet, [illegible] milieu a' de l'arc $aa'b$ (*fig.* 88) on tire les cordes [illegible] on aura deux côtés consécutifs du polygone inscrit, d'un nombre de côtés double de celui des côtés du polygone auquel appartient ab. Tirant ensuite $A'B'$ perpendiculaire sur $a'O$, les droites aA', $A'a'$, $a'B'$, $B'b$ seront des demi-côtés du polygone circonscrit correspondant à celui dont aa' fait partie (149). Maintenant il est visible que les portions aAb, $aA'B'b$, ab, $aa'b$ seront contenues dans les polygones dont elles font partie, autant de fois que l'arc $aa'b$ l'est dans la circonférence entière, et seront, par conséquent, des parties semblables de chaque polygone; et puisque $aa' + a'b > ab$, le contour du second polygone inscrit surpassera celui du premier. Ensuite, de ce que $A'B' < AA' + AB'$, il résulte (15)

$$aA'B'b < aA + bA,$$

et que, par conséquent, le contour du second polygone circonscrit est moindre que celui du premier.

Cela posé, puisque le polygone inscrit, toujours moindre que le polygone circonscrit correspondant, augmente de contour quand on multiplie ses côtés, tandis que celui-ci diminue, il en résulte que la différence entre les deux polygones décroît aussi dans la même circonstance. On peut même, quelque petite que soit la quantité donnée δ, trouver deux polygones, l'un inscrit, l'autre circonscrit, tels que la différence de leurs contours soit moindre que cette grandeur. Pour s'en convaincre, il faut se rappeler que les contours de deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont entre eux comme les rayons des cercles auxquels ils sont circonscrits (140); car, si l'on désigne par P le contour du polygone ABCDE (*fig.* 87), et par p celui du polygone $abcde$, on aura

$$P : p :: Oa : OG;$$

d'où l'on conclura

$$P - p : P :: Oa - OG : Oa, \quad \text{et} \quad P - p = \frac{\overline{a'G} \times P}{Oa}.$$

Mais rien ne s'oppose à ce que l'on rende a'O plus petit que telle grandeur donnée qu'on voudra ; car, ayant porté sur le rayon Oa' une partie a'G de la petitesse demandée, et tiré la corde ab, si l'arc $aa'b$ n'est pas aliquote de la circonférence, il n'y aura qu'à prendre une partie aliquote moindre que cet arc, et la ligne analogue à a'G sera encore plus petite.

On peut donc, en multipliant autant qu'il sera nécessaire les côtés du polygone inscrit, rendre la quantité $\mathrm{P} - p$ aussi petite qu'on voudra.

152. *Corollaire.* — Puisque, d'après ce qui précède, les contours des polygones circonscrits diminuent sans cesse à mesure qu'ils approchent de la circonférence du cercle, tandis que ceux des polygones inscrits augmentent toujours dans la même circonstance, il est visible que la circonférence du cercle est moindre que le contour du polygone circonscrit, et plus grande que celui du polygone inscrit. Cette circonférence différera donc moins de l'un quelconque de ces contours, qu'ils ne diffèrent entre eux, et l'on pourra, par conséquent, trouver un polygone, soit inscrit, soit circonscrit, tel que la différence entre son contour et la circonférence du cercle soit moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite qu'elle soit.

C'est sur cette propriété que repose le procédé qu'Archimède employa pour parvenir à déterminer d'une manière approchée le rapport de la circonférence au diamètre ; et j'en ferai un usage semblable, lorsque j'aurai montré que ce rapport est le même dans tous les cercles : pour cela, j'établirai un théorème qui pourra s'appliquer à toute proposition du genre de celles que j'ai à démontrer.

THÉORÈME.

153. *Si deux grandeurs invariables* A *et* B *sont telles, qu'on puisse prouver que leur différence* A — B *est*

moindre qu'une troisième grandeur δ, *quelque petite que puisse être cette dernière, ces deux grandeurs sont égales entre elles.*

Démonstration. — En effet, si elles étaient inégales, on aurait nécessairement $A - B = D$, D marquant leur différence : il ne serait donc pas possible de prendre δ au-dessous de D, et, par conséquent, aussi petit qu'on voudrait.

Observation. — Il faut bien faire attention, dans la proposition ci-dessus, au mot *invariable;* car on peut bien trouver, par exemple, une expression de $\sqrt{2}$ qui diffère de la vraie d'une quantité moindre que telle autre qu'on voudra, sans cependant arriver jamais à la valeur exacte de $\sqrt{2}$; mais les résultats changent à chaque nouvelle approximation, tandis que les grandeurs A et B ne sont susceptibles l'une et l'autre que d'une seule détermination.

THÉORÈME.

154. *Les circonférences des cercles sont entre elles comme leurs rayons ou leurs diamètres.*

Démonstration. — Quel que soit le nombre de leurs côtés, pourvu qu'il soit le même dans l'un et dans l'autre, les contours de deux polygones réguliers étant entre eux comme les rayons des cercles dans lesquels ils sont inscrits, si l'on désigne par p et p' ces contours, et par R et R′ les rayons des cercles correspondants, on aura $\frac{p'}{p} = \frac{R'}{R}$; et, de plus, on peut concevoir que le nombre des côtés des polygones soit tel, que la différence entre leur contour et la circonférence du cercle dans lequel chacun d'eux est inscrit soit au-dessous de telle grandeur qu'on voudra. Si donc $\frac{C'}{C}$ est le rapport des circonférences, la différence entre les rapports $\frac{C'}{C}$ et $\frac{p'}{p}$, s'il en existe une, pourra être réduite à tel degré de petitesse qu'on voudra. Cette différence étant aussi celle des rapports invariables $\frac{C'}{C}$ et $\frac{R'}{R}$, puisque $\frac{p'}{p} = \frac{R'}{R}$, on peut prouver que la différence entre les quantités invariables $\frac{C'}{C}$ et $\frac{R'}{R}$ est au-dessous de toute grandeur donnée : on aura donc, par la proposition précédente,

$$\frac{C'}{C} = \frac{R'}{R}, \quad \text{ou} \quad C : C' :: R : R';$$

ce qui donne aussi

$$C : C' :: 2R : 2R', \quad \text{ou} \quad :: D : D',$$

en appelant D et D′ les diamètres des cercles proposés (1).

155. *Corollaire.* — La proposition précédente fait voir que le rapport de la circonférence au diamètre est le même dans tous les cercles, et qu'on peut, au moyen

---

(1) Ceci peut se prouver immédiatement de plusieurs manières, par des raisonnements analogues à ceux du n° **58**, en observant que, quelque peu différents que soient l'un de l'autre deux cercles, on peut toujours concevoir un polygone régulier plus grand que l'un et plus petit que l'autre. Cette proposition, qui résulte évidemment de celle du n° **152**, a été présentée par Euclide (liv. XII, proposit. 16) sous une forme très-élégante. Cet auteur suppose qu'on ait décrit les deux cercles d'un centre commun O′ (*fig.* 89). Il est visible alors que si l'on mène la tangente MN au cercle intérieur, et qu'on prenne sur le cercle extérieur une partie aliquote moindre que l'arc MQN, le polygone D′E′F′G′H′ construit sur cette partie n'atteindra point la circonférence du petit cercle.

Voici comment Maurolycus, auteur d'un Commentaire très-estimé sur Archimède, imprimé à Panorme en Sicile, sous la date de 1685, s'est servi de cette remarque (pages 5 et suivantes) pour démontrer la proposition ci-dessus :

Si l'on n'avait pas C : C′ :: DO : *d*′O′, mais C : C′ :: DO : D′O′, D′O′ étant > *d*′O′, on décrirait sur D′O′ un cercle concentrique au cercle C′, et l'on inscrirait dans le premier un polygone D′E′F′G′H′ qui n'atteignît pas le second : comparant ce polygone à son correspondant DEFGH dans de ce rapport, calculer la longueur d'une circonférence dont on connaît le rayon. En effet, si π désigne ce rapport, ou, ce qui revient au même, la circonférence du cercle dont le diamètre est pris pour unité, on aura cette proportion :

$$1 : \pi :: 2R : C,$$

de laquelle on tirera

$$C = 2\pi R, \quad \text{et} \quad R = \frac{C}{2\pi},$$

formules avec lèsquelles on calculera la circonférence C, lorsque le rayon R sera donné, ou le rayon quand on connaîtra la circonférence.

PROBLÈME.

156. *Trouver le rapport approché de la circonférence au diamètre.*

Solution. — Il est évident, par le n° **152**, qu'on résoudra cette question, en calculant, dans une des suites

---

le cercle C, et désignant les contours respectifs de ces polygones par p' et p, on aurait

$$DO : D'O' :: p : p',$$

d'où il suivrait

$$C : C' :: p : p',$$

ce qui ne peut être, puisque $C > p$, $C' < p'$.

On ne peut pas supposer non plus que $C : C' :: DO : X$, X étant $< d'O'$; car le renversement de cette proportion donnerait

$$C' : C :: X : DO,$$

et posant

$$X : DO :: d'O' : Z,$$

il en résulterait

$$C' : C :: d'O' : Z;$$

mais, par l'avant-dernière proportion, on aurait $Z > DO$, à cause de $X < d'O'$. Ainsi, dans la dernière, le quatrième terme surpasserait le rayon de la circonférence qui forme le second terme, ce qui a été prouvé absurde dans le premier cas de la démonstration.

L'avantage qu'on peut trouver à ce tour de démonstration, qui est, comme on le voit, très-ancien, c'est qu'il met en quelque sorte sous les yeux le polygone qu'il faut considérer.

de polygones qu'on sait inscrire, le contour d'un certain nombre des premiers et le contour des polygones circonscrits correspondants. On aura, par ce moyen, deux suites de nombres, les uns plus petits que la circonférence, les autres plus grands; et l'on s'arrêtera lorsque la différence des nombres correspondants des deux suites sera devenue moindre que le degré d'approximation qu'on veut obtenir dans la valeur de la circonférence. Je vais appliquer à cette recherche les polygones de 6, 12, 24, etc., côtés, inscrits et circonscrits au cercle dont le rayon égale 1.

Soient d'abord a le côté d'un polygone inscrit quelconque, A celui du polygone circonscrit correspondant, a' enfin celui du polygone inscrit comprenant le double de côtés du premier; on aura (150)

$$A = \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}a^2}} = \frac{a}{\frac{1}{2}\sqrt{4 - a^2}},$$

et (141)

$$a' = \sqrt{2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}a^2}\right)} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}.$$

En commençant par l'hexagone inscrit, où $a = 1$, on trouvera $A = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Le contour de l'hexagone inscrit sera, par conséquent, 6, celui de l'hexagone circonscrit $\frac{12}{\sqrt{3}}$; et la circonférence se trouvera comprise entre ces deux nombres: on obtiendra des limites plus resserrées en passant aux polygones réguliers de 12 côtés et aux suivants.

Soient donc a', a'', a''', etc., les côtés des polygones inscrits de 12, de 24, de 48, etc., côtés, A', A'', A''', etc., les côtés des polygones circonscrits correspondants: le rayon du cercle étant 1, sa circonférence sera 2π (155); et si, pour abréger, on pose

$$r' = \tfrac{1}{2}\sqrt{4 - a'^2},\quad r'' = \tfrac{1}{2}\sqrt{4 - a''^2},\quad r''' = \tfrac{1}{2}\sqrt{4 - a'''^2},\ldots,$$

on aura, par les formules précédentes,

$$a' = \sqrt{2 - \sqrt{3}}, \qquad A' = \frac{a'}{r'}, \qquad 2\pi \begin{cases} > 12\,a' \\ < 12\,A' \end{cases}$$

$$a'' = \sqrt{2 - 2r'}, \qquad A'' = \frac{a''}{r''}, \qquad 2\pi \begin{cases} > 24\,a'' \\ < 24\,A'' \end{cases}$$

$$a''' = \sqrt{2 - 2r''}, \qquad A''' = \frac{a'''}{r'''}, \qquad 2\pi \begin{cases} > 48\,a''' \\ < 48\,A''' \end{cases}$$

etc.

On trouvera successivement $\sqrt{3} = 1,73205080756 8877$ (1),

a'	$= 0,517638090205$	$12\,a'$	$= 6,2116571$
r'	$= 0,965925826289$	$12\,A'$	$= 6,4307806$
a''	$= 0,26\ 052384440$	$24\,a''$	$= 6,2652572$
r''	$= 0,991444861374$	$24\,A''$	$= 6,3193199$
a'''	$= 0,\ 30806258460$	$48\,a'''$	$= 6,2787004$
r'''	$= 0,997858923238$	$48\,A'''$	$= 6,2921724$
a^{IV}	$= 0,065438165643$	$96\,a^{\text{IV}}$	$= 6,2820639$
r^{IV}	$= 0,999464587476$	$96\,A^{\text{IV}}$	$= 6,2854292$
a^{V}	$= 0,032723463253$	$192\,a^{\text{V}}$	$= 6,2829049$
r^{V}	$= 0,999866137909$	$192\,A^{\text{V}}$	$= 6,2837461$
a^{VI}	$= 0,016362279208$	$384\,a^{\text{VI}}$	$= 6,2831152$
r^{VI}	$= 0,999966533917$	$384\,A^{\text{VI}}$	$= 6,2833260$
a^{VII}	$= 0,008181208052$	$768\,a^{\text{VII}}$	$= 6,2831678$
r^{VII}	$= 0,999991633444$	$768\,A^{\text{VII}}$	$= 6,2832203$
a^{VIII}	$= 0,004090612582$	$1536\,a^{\text{VIII}}$	$= 6,2831809$
r^{VIII}	$= 0,999997908359$	$1536\,A^{\text{VIII}}$	$= 6,2831941$
a^{IX}	$= 0,002045307361$	$3072\,a^{\text{IX}}$	$= 6,2831842$
r^{IX}	$= 0,999999477089$	$3072\,A^{\text{IX}}$	$= 6,2831875$
a^{X}	$= 0,001022653814$	$6144\,a^{\text{X}}$	$= 6,2831850$
r^{X}	$= 0,999999869272$	$6144\,A^{\text{X}}$	$= 6,2831858$
a^{XI}	$= 0,000511326924$	$12288\,a^{\text{XI}}$	$= 6,2831852$
r^{XI}	$= 0,999999967318$	$12288\,A^{\text{XI}}$	$= 6,2831854$

On voit, par ce tableau, comment les contours des polygones inscrits et circonscrits correspondants se rapprochent de plus en plus; ceux des polygones de 12288

(1) Voy [illegible] es Sciences 1747, page 445.

côtés ne diffèrent que de deux unités décimales du septième ordre. Les sept premiers chiffres, communs à l'un et à l'autre, appartiendront nécessairement à la circonférence du cercle, dont la longueur sera par conséquent 6,283185, à moins d'un millionième près.

Si l'on prend, pour la circonférence du cercle, le milieu entre le contour du polygone inscrit et celui du polygone circonscrit de 12288 côtés, on aura 6,2831853, valeur qui est exacte jusqu'au dernier chiffre inclusivement; le rapport du diamètre à la circonférence sera donc 2 : 6,2831853, ou 1 : 3,1415926, en divisant ses deux termes par 2. Ainsi, 3,1415926 est une valeur approchée du rapport désigné par π, dans le n° 155; et en faisant $C = 1$, on trouvera $2R = 0{,}3183099$, nombre qui représente le diamètre, lorsque la circonférence est 1.

Archimède s'arrêta aux polygones de 96 côtés, et trouva que la circonférence du cercle était $< 3\frac{10}{70}$ et $> 3\frac{10}{71}$; ce qui donne le rapport si connu de 1 : $3\frac{1}{7}$ ou 7 : 22. Depuis, on a poussé l'exactitude beaucoup plus loin; mais, parmi les divers rapports obtenus, celui de 113 à 355 mérite une attention particulière par sa simplicité et son exactitude, puisque, étant évalué en décimales, il donne 3,1415929, résultat vrai jusqu'au sixième chiffre décimal inclusivement. Adrien Métius, en le citant dans sa *Geometriæ practica*, l'attribue à son père Pierre Métius, comme l'ayant publié dans une réfutation de la quadrature du cercle proposée par Simon Duchesne (1).

---

(1) Les recherches des savants anglais dans l'Inde nous ont fait connaître un rapport de la circonférence au diamètre plus approché que celui d'Archimède : c'est celui de 3927 à 1250, consigné dans l'*Ayeen Akbery*, ouvrage persan contenant un extrait de la doctrine des brahmes, et traduit en anglais par M. Gladwin (tome II, page 317).

Si l'on multiplie par 8 les deux termes de ce rapport, ils deviennent 31416 et 10000; puis si l'on double ceux-ci, on obtient 62832 et 20000, qui se trouvent dans l'Algèbre de Mohammed-Ben-Musa, auteur oriental

157. *Remarque.* — La formation du tableau précédent n'est pas le moyen le plus expéditif pour parvenir à la valeur du côté du dernier polygone inscrit qu'il renferme; on réduit à la moitié le nombre des extractions de racines, en calculant, au lieu des côtés des polygones intermédiaires, les cordes BC, B′C (*fig.* 80) des arcs qu'il faut ajouter aux arcs AB et AB′, pour compléter la demi-circonférence AB′BC. En effet,

$$\mathrm{BC} = \sqrt{\overline{\mathrm{AC}}^2 - \overline{\mathrm{AB}}^2}, \quad \mathrm{B'C} = \sqrt{\overline{\mathrm{AC}}^2 - \overline{\mathrm{AB'}}^2},$$

puisque les triangles ABC, AB′C formés sur le diamètre AC et ayant un de leurs angles à la circonférence, sont nécessairement rectangles (**114**). Si l'on prend le rayon AO pour unité, que l'on désigne AB et AB′ par a et a', BC et B′C par b et b', à cause de $\mathrm{AC} = 2$, on trouvera

$$b = \sqrt{4 - a^2}, \quad b' = \sqrt{4 - a'^2};$$

et comme on a, par le numéro précédent,

$$a' = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}},$$

il viendra

$$a' = \sqrt{2 - b} \quad \text{ou} \quad a'^2 = 2 - b.$$

---

du IX^e siècle (page 71 de la traduction anglaise). Ce dernier rapport est celui des Indiens, ramené au rayon 10000, et répond aux polygones de 768 côtés.

Il est bon de savoir que les rapports 7 : 22 et 113 : 355 se présentent d'eux-mêmes dans la suite des fractions approchées que l'on obtient lorsque l'on convertit en fraction continue (*Arithm.*, **165**) la fraction ordinaire qui correspond au rapport exprimé ci-dessus en décimales (*Arithm.*, **85**). Mais comme ce rapport n'est pas rigoureusement exact, on ne doit pas pousser le calcul jusqu'à la fin; il faut opérer en même temps sur les fractions

$$\frac{31415926}{10000000}, \quad \frac{31415927}{10000000},$$

l'une plus petite, l'autre plus grande que le rapport exact, et se borner aux quotients qui sont communs aux deux opérations. (Pour plus de détails, *voyez* le *Complément des Éléments d'Algèbre*.)

Mettant cette valeur dans celle de b', il en résultera

$$b' = \sqrt{2 + b}.$$

On passera donc de b à b' en prenant la racine carrée de la première quantité augmentée de 2. Il est évident qu'on aura de même $b'' = \sqrt{2 + b'}$, b'' représentant la corde B''C de l'arc correspondant à AB'' moitié de AB'; et ainsi de suite.

En partant de $a = 1$, on trouve :

$$
\begin{aligned}
b &= \sqrt{3} = 1{,}7320508076 \\
b' &= \sqrt{2 + 1{,}7320508076} = 1{,}9318516526 \\
b'' &= \sqrt{2 + 1{,}9318516526} = 1{,}9828897227 \\
b''' &= \sqrt{2 + 1{,}9828897227} = 1{,}9957178465 \\
b^{\text{iv}} &= \sqrt{2 + 1{,}9957178465} = 1{,}9989291749 \\
b^{\text{v}} &= \sqrt{2 + 1{,}9989291749} = 1{,}9997322758 \\
b^{\text{vi}} &= \sqrt{2 + 1{,}9997322758} = 1{,}9999330678 \\
b^{\text{vii}} &= \sqrt{2 + 1{,}9999330678} = \sqrt{3{,}9999330678}
\end{aligned}
$$

et comme b répond au polygone de 6 côtés, b' répondra à celui de 12, b'' à celui de 24, b''' à celui de 48, b^{iv} à celui de 96, b^{v} à celui de 192, b^{vi} à celui de 384, et b^{vii} à celui de 768. En nommant a^{vii} le côté de ce dernier, on aura

$$
\begin{aligned}
a^{\text{vii}} &= \sqrt{4 - b^{\text{vii}\,2}} = \sqrt{4 - 3{,}9999330678} \\
&= \sqrt{0{,}0000669322} = 0{,}0081812\text{I} ;
\end{aligned}
$$

et multipliant ce nombre par 768, on obtienda le contour du polygone inscrit de 768 côtés, comme dans le tableau du numéro précédent : on calculera ensuite le polygone circonscrit correspondant.

SECTION II.

DE L'AIRE DES POLYGONES ET DE CELLE DU CERCLE.

158. Par la surface d'une figure quelconque, on entend la portion d'étendue renfermée entre les lignes qui terminent cette figure. On appelle aussi cette étendue l'*aire* de la figure.

Il serait convenable d'affecter spécialement le mot *aire* à l'étendue superficielle, lorsqu'on l'envisage par rapport à sa grandeur : car le mot *surface* s'emploie le plus souvent pour désigner la forme, abstraction faite de toutes limites (1) : c'est ce que je ferai dans le cours de cet ouvrage.

159. Il est évident, et d'ailleurs la suite en fournira beaucoup d'exemples, que deux figures de formes très-différentes peuvent renfermer des aires égales. J'exprimerai cette circonstance en disant, avec Legendre, que les deux figures sont *équivalentes,* et réservant la dénomination d'*égales* pour les figures semblables qui peuvent être superposées.

160. Dans les triangles et dans les parallélogrammes, on choisit arbitrairement un des côtés, auquel on donne le nom de *base,* et l'on appelle *hauteur* la perpendiculaire abaissée de l'angle opposé à ce côté dans le triangle, ou d'un point quelconque du côté opposé dans le parallélogramme.

(1) On dit, en effet, une *surface courbe,* par opposition au plan ou à la surface plane; et pour en déterminer l'étendue, il faudrait dire, *la surface d'une surface courbe,* locution vicieuse à tous égards : tandis que l'*aire d'une surface courbe* est une expression à la fois claire et correcte. En l'adoptant, on conserve l'analogie entre les lignes et les surfaces, puisque ces derniers mots s'appliquent aux formes seulement; et le mot *aire* devient, pour le second cas, l'analogue du mot *longueur* dans le premier.

BD et B′D′ (*fig.* 90) sont les hauteurs des triangles ABC, A′B′C′, en prenant les côtés AC, A′C′ pour bases. Il faut remarquer que la perpendiculaire B′D′, tombant en dehors du triangle A′B′C′, est, à proprement parler, perpendiculaire sur le prolongement de la base.

Le sommet de l'angle opposé à la base s'appelle le *sommet* du triangle.

La droite IK est la hauteur du parallélogramme EFGH. Il est évident qu'elle demeurera la même, de quelque point du côté HG qu'on l'abaisse (55).

Il n'est pas moins évident que les triangles dont les bases sont sur la même droite, et dont les sommets sont sur une ligne parallèle à cette base, ont même hauteur; c'est-à-dire que les triangles compris entre les mêmes parallèles ont même hauteur. Les triangles ABC, A′B′C′ et le parallélogramme EFGH ont tous les trois même hauteur, puisque, entre les parallèles AF et BG, les droites BD, B′D′ et IK sont égales (55).

THÉORÈME.

161. *Deux parallélogrammes de même base et de même hauteur sont équivalents.*

Démonstration. — Ces parallélogrammes ayant même base, on pourra poser celle de l'un sur celle de l'autre; et comme ils ont en outre même hauteur, le côté opposé à la base du premier tombera sur le côté opposé à la base du second, ou sur le prolongement de ce côté, ainsi que le montrent les deux *fig.* 91, pour des parallélogrammes ABCD, ABEF.

Cela posé, les triangles ADF et BCE sont égaux, parce que les côtés AD et BC, AF et BE sont respectivement égaux, comme côtés opposés d'un même parallélogramme, et que les angles DAF, CBE, dont les côtés sont parallèles et les ouvertures tournées dans le même sens, sont égaux. Si du quadrilatère ABED on retranche, d'une part, le triangle ADF, et de l'autre le triangle BCE, on aura nécessairement deux grandeurs égales, dont l'une sera le parallélogramme ABEF, et l'autre le parallélogramme ABCD.

THÉORÈME.

162. *Un triangle quelconque est la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur.*

Démonstration. — Si, par les angles B et C du triangle ABC (*fig.* 92), on mène les droites BD et CD respectivement parallèles aux côtés AC et AB, la figure ABDC sera un parallélogramme (79) ayant même base et même hauteur que le triangle proposé (160). Les triangles ABC et BCD, ayant leurs côtés AB et CD, AC et BD égaux (54), et, en outre, le côté CB commun, seront égaux : le triangle ABC sera donc la moitié du parallélogramme ABDC.

163. *Corollaire.* — Il suit de là que deux triangles qui ont même base et même hauteur sont équivalents. En effet, ces triangles seront, d'après ce qui précède, les moitiés de parallélogrammes de même base et de même hauteur, ou de parallélogrammes équivalents (161).

PROBLÈME.

164. *Transformer un polygone d'un certain nombre de côtés, en un autre qui ait un côté de moins, et qui soit équivalent.*

Solution. — Soit pour exemple le pentagone ABCDE (*fig.* 93) ; on joindra les deux angles E et C par une droite, et par le sommet de l'angle D, placé entre les premiers, on mènera parallèlement à CE la droite DF, qui déterminera sur le côté AE prolongé un point F, lequel, étant joint au point C, formera le quadrilatère ABCF, équivalent au pentagone ABCDE.

Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que les triangles CDE, CFE, reposant sur la même base CE, et étant compris entre les parallèles CE et DF, sont équivalents (numéro précédent), et que l'on obtient le pentagone ABCDE et le quadrilatère ABCF, en ajoutant successivement chacun de ces triangles au même quadrilatère ABCE.

Le procédé ne changerait pas, quand même le pentagone ABCDE aurait un angle rentrant, comme dans la *fig.* 94; seulement il faudrait observer, pour la démonstration, que le pentagone ABCDE et le quadrilatère ABCF se forment en retranchant du quadrilatère ABCE les triangles équivalents CDE et CFE.

Il est évident que la construction et les raisonnements qui précèdent peuvent s'appliquer à quelque polygone que ce soit.

165. *Corollaire.* — En effectuant sur le quadrilatère ABCF une construction semblable à la précédente, on le transformera en un triangle équivalent, et, par une suite d'opérations semblables, on transformera un polygone quelconque en un triangle équivalent. Si l'on avait, par exemple, un hexagone, on le transformerait d'abord en un pentagone, puis on ferait de celui-ci un quadrilatère, puis enfin de ce dernier un triangle.

THÉORÈME.

166. *Deux rectangles de même base,* ABCD *et* EFGH (fig. 95), *sont entre eux comme les hauteurs* (1).

Démonstration. — Ici, comme dans le n° 58, les hauteurs AD et EH des deux parallélogrammes peuvent être commensurables entre elles, ou bien incommensurables.

Dans la première hypothèse, si l'on divise ces hau-

(1) J'ai changé l'énoncé qu'on donne ordinairement à cette proposition, afin de le rendre semblable à celui de la proposition du n° 255, qui est ...gue à celle-ci.

teurs AD et EH en parties, telles que Ad et Eh, égales à leur commune mesure, et que, par les points de division, on mène des parallèles à la base, on formera dans chacun des rectangles proposés autant de rectangles égaux qu'il y a de divisions dans sa hauteur; car la base de tous ces petits rectangles sera égale à AB, et leurs hauteurs seront toutes égales entre elles. Le rapport des rectangles ABCD et EFGH sera évidemment égal à celui des nombres qui expriment combien il y a de petits rectangles dans l'un et dans l'autre, nombres qui sont précisément ceux des parties égales contenues dans leurs hauteurs AD et EH : on aura donc

$$\mathrm{ABCD} : \mathrm{EFGH} :: \mathrm{AD} : \mathrm{EH}.$$

Dans la figure, le rectangle ABCD se trouvant partagé en cinq parties égales à $\mathrm{AB}cd$, et le rectangle EFGH en trois, on a

$$\mathrm{ABCD} : \mathrm{EFGH} :: 5 : 3.$$

Lorsque les hauteurs AD et EH sont incommensurables (*fig.* 96), on prouve que le rapport des rectangles ABCD et EFGH ne peut être ni plus grand ni moindre que celui de ces hauteurs.

En effet, si l'on avait

$$\mathrm{ABCD} : \mathrm{EFGH} :: \mathrm{AD} : \mathrm{EI},$$

EI surpassant EH; que l'on conçût AD divisé en parties égales moindres que HI, et que l'on portât ces parties sur EI, de E vers I, il tomberait nécessairement un point de division h, entre H et I. En menant, par ce point, hg parallèle à EF, on formerait le rectangle $\mathrm{EF}gh$, pour lequel on aurait

$$\mathrm{ABCD} : \mathrm{EF}gh :: \mathrm{AD} : \mathrm{E}h,$$

puisque les hauteurs AD et Eh seraient commensurables entre elles par construction; et comparant cette proportion à la précédente, on en tirerait

$$EFGH : EFgh :: EI : Eh;$$

ce qui ne peut être, puisque $EFGH < EFgh$ et $EI > Eh$.

En portant le point I de l'autre côté de GH, en I', on ne pourrait pas non plus avoir

$$ABCD : EFGH :: AD : EI',$$

parce qu'en prenant en h' le point de division correspondant à h, on aurait premièrement, pour les hauteurs AD et Eh', commensurables entre elles,

$$ABCD : EFg'h' :: AD : Eh',$$

proportion qui conduirait à ce résultat,

$$EFGH : EFg'h' :: EI' : Eh',$$

absurde à cause que $EFGH > EFg'h'$ et $EI' < Eh'$.

Le rapport de ABCD à EFGH ne pouvant donc être ni plus grand ni plus petit que celui de AD à EH, on aura nécessairement

$$ABCD : EFGH :: AD : EH.$$

THÉORÈME.

167. *Deux rectangles quelconques sont entre eux comme les produits de leur base par leur hauteur, ou comme les produits de deux côtés contigus.*

Démonstration. — En prenant sur la base du parallélogramme ABCD (*fig.* 97) une partie Ab égale à la base du parallélogramme EFGH, et tirant la droite bc parallèle à BC, on aura, par le théorème précédent,

$$AbcD : EFGH :: AD : EH;$$

prenant ensuite AD pour base des parallélogrammes ABCD et $AbcD$, qui auront alors pour hauteur AB et Ab, on en conclura

$$ABCD : AbcD :: AB : Ab.$$

En multipliant ces proportions par ordre, avec l'attention d'omettre le facteur A*bc*D, commun aux deux termes du premier rapport composé, et de substituer à A*b* son égale EF, il viendra

$$\text{ABCD} : \text{EFGH} :: \overline{\text{AB}} \times \overline{\text{AD}} : \overline{\text{EF}} \times \overline{\text{EH}},$$

résultat qui renferme l'énoncé de la proposition (1).

168. *Remarque.* — Mesurer des grandeurs n'étant autre chose que comparer entre elles celles de même espèce, il est évident que la mesure des aires doit avoir pour but de savoir combien une aire quelconque en contient une autre prise arbitrairement pour servir de terme de comparaison. Mesurer, par exemple, le rectangle ABCD (*fig.* 98), c'est chercher combien de fois ce rectangle contient un carré *abcd* dont on suppose que le

---

(1) Je me suis servi ci-dessus de la multiplication par ordre comme du moyen le plus simple pour parvenir au résultat cherché; mais il pourrait arriver que l'on éprouvât quelque difficulté à concevoir ce changement, dans lequel il semble qu'il faut multiplier des aires entre elles. Cette difficulté cessera si l'on imagine que ces aires, pour être comparées entre elles, sont rapportées à une certaine aire prise pour mesure commune ou pour unité. On mettra encore plus de netteté dans ce passage en le rendant ainsi qu'il suit :

Les proportions

$$\text{A}bc\text{D} : \text{EFGH} :: \text{AD} : \text{EH}, \quad \text{ABCD} : \text{A}bc\text{D} :: \text{AB} : ab$$

donnent

$$\frac{\text{EFGH}}{\text{A}bc\text{D}} = \frac{\text{EH}}{\text{AD}}, \quad \frac{\text{A}bc\text{D}}{\text{ABCD}} = \frac{ab}{\text{AB}},$$

ce qui ne présente aucune obscurité, puisqu'il s'agit de rapports de grandeurs homogènes. Cela posé, $\frac{\text{EH}}{\text{AD}}$ désignant combien l'aire EFGH contient l'aire A*bc*D, et $\frac{\text{A}b}{\text{AB}}$ combien l'aire A*bc*D contient l'aire ABCD, le nombre de fois que la première contient la dernière sera donc exprimé par

$$\frac{\text{EH}}{\text{AD}} \times \frac{\text{A}b}{\text{AB}} = \frac{\overline{\text{EF}} \times \overline{\text{EH}}}{\overline{\text{AB}} \times \overline{\text{AD}}},$$

en concevant les droites rapportées à une commune mesure.

côté soit égal à la droite prise pour mesure commune des longueurs des droites; et, d'après ce qui précède, on aura, en concevant la base et la hauteur AB et BC du parallélogramme ABCD rapportées à cette mesure,

$$abcd : \mathrm{ABCD} :: \overline{ab} \times \overline{bc} : \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{BC}}, \text{ ou } :: 1 : \frac{\mathrm{AB}}{ab} \times \frac{\mathrm{BC}}{bc};$$

ce qui montre que *le rectangle* ABCD *contient le rectangle abcd, ou l'aire prise pour unité, comme le produit du nombre d'unités linéaires contenues dans sa base* AB, *multiplié par le nombre d'unités linéaires contenues dans sa hauteur* BC, *contient l'unité numérique*, expression dont l'exactitude est évidente, puisque les rapports y sont réduits à des nombres. Ce n'est que pour abréger qu'on la remplace par celle-ci : *L'aire d'un rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur;* et il faut toujours être en état de restituer, d'après la première, ce qu'on a sous-entendu dans la seconde.

La vérité de la proposition précédente résulte de l'inspection seule de la figure, lorsque le côté du carré *abcd*, pris pour mesure commune, est contenu exactement dans la base et dans la hauteur du rectangle ABCD. En menant alors par tous les points de division de la hauteur BC, des droites *ef* parallèles à AB, on partage le rectangle ABCD en autant de rectangles égaux, ou bandes, que sa hauteur contient de fois *ab*; et chacune de ces bandes peut, comme AB*ef*, être partagée en autant de carrés B*egh*, égaux à *abcd*, que la base AB contient de fois *ab* : le nombre total des carrés égaux à B*egh*, contenus dans le rectangle ABCD, est donc égal à celui des carrés contenus dans une bande AB*ef*, multiplié par le nombre des bandes, ce qui fait le produit du nombre d'unités linéaires de la base par le nombre d'unités linéaires de la hauteur.

169. 1^er^ *corollaire*. — Si les deux côtés du rectangle

AB et BC devenaient égaux, auquel cas il se changerait en carré, son aire serait mesurée par la seconde puissance de son côté AB, c'est-à-dire qu'il contiendrait le carré *abcd*, pris pour unité, autant de fois que la seconde puissance du nombre d'unités linéaires contenues dans son côté contiendrait l'unité numérique; et de là vient qu'on appelle aussi *carré* d'un nombre la seconde puissance de ce nombre.

170. 2e *corollaire*. — L'aire d'un parallélogramme se mesure par le produit de sa base par sa hauteur. En effet, les parallélogrammes de même base et de même hauteur étant équivalents (161), un parallélogramme quelconque est nécessairement équivalent au rectangle de même base et de même hauteur. On conclut encore de là que deux parallélogrammes quelconques, étant entre eux comme leurs mesures respectives, sont, par conséquent, dans le rapport des produits de leur base par leur hauteur, et simplement comme leurs bases si leurs hauteurs sont égales, ou comme leurs hauteurs lorsqu'ils ont même base.

171. 3e *corollaire*. — L'aire d'un triangle est mesurée par la moitié du produit de sa base par sa hauteur, puisque tout triangle est la moitié d'un rectangle de même base et de même hauteur. Les moitiés étant entre elles comme les touts, les triangles quelconques seront entre eux comme les parallélogrammes dont ils font partie, et, par conséquent, comme les produits de leur base par leur hauteur (numéro précédent), ou comme leurs bases quand leurs hauteurs sont égales, ou comme leurs hauteurs quand ils ont même base.

PROBLÈME.

172. *Transformer en un carré un parallélogramme ou un triangle donné.*

Solution. — 1°. On trouvera le côté FG (*fig*. 99) du carré FGHI équivalent au parallélogramme donné ABCD, en prenant une moyenne proportionnelle entre la base AB et la hauteur DE de ce parallélogramme.

En effet, on a, par cette construction,

$$\mathrm{AB} : \mathrm{FG} :: \mathrm{FG} : \mathrm{DE},$$

d'où l'on tire

$$\overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{DE}} = \overline{\mathrm{FG}}^2;$$

et comme $\overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{DE}}$ est la mesure de l'aire du parallélogramme proposé, et $\overline{\mathrm{FG}}^2$ celle du carré FGHI construit sur FG, cette dernière figure est équivalente à l'autre.

2°. A l'égard du triangle A′B′D′, c'est entre la base A′B′ et la moitié de la hauteur D′E′ que doit être prise la moyenne proportionnelle FG, parce qu'on a alors

$$\mathrm{A'B'} : \mathrm{FG} :: \mathrm{FG} : \tfrac{1}{2}\mathrm{D'E'},$$

d'où il suit

$$\tfrac{1}{2}\overline{\mathrm{A'B'}} \times \overline{\mathrm{D'E'}} = \overline{\mathrm{FG}}^2;$$

le premier de ces produits exprime, en effet, l'aire du triangle, et le second celle du carré.

173. *Corollaire.* — On peut, par le moyen du problème précédent, transformer un polygone quelconque en un carré équivalent; il faudra d'abord le transformer en un triangle par le procédé du n° 164, et l'on changera ensuite ce triangle en un carré.

174. *Remarque.* — Tout polygone pouvant être partagé en triangles (81), on évaluera son aire en calculant séparément celle de chacun des triangles qui le composent, et en prenant la somme des résultats.

THÉORÈME.

175. *L'aire d'un quadrilatère* ABCD (fig. 100), *dans lequel deux côtés sont parallèles, et qu'on nomme* trapèze, *se mesure par le produit de la demi-somme des* *deux côtés parallèles,* AB *et* CD, *multipliée par la hauteur* EF, *prise entre ces côtés.*

Démonstration. — En tirant la diagonale CB, on partagera le trapèze en deux triangles ABC et BCD, dont EF sera la hauteur commune; et parce que

$$ABCD = ABC + BCD,$$
$$ABC = \tfrac{1}{2}\overline{AB} \times \overline{EF}, \quad BCD = \tfrac{1}{2}\overline{CD} \times \overline{EF},$$

on aura

$$ABCD = \tfrac{1}{2}\, AB \times EF + \tfrac{1}{2}\overline{CD} \times \overline{EF} = \tfrac{1}{2}(AB + CD)\, EF;$$

ce qui est l'énoncé du théorème.

Il est bon de remarquer que la droite GH, menée parallèlement à AB, par le milieu G de l'un des côtés non parallèles du trapèze, sera égale à $\frac{1}{2}$ (AB + CD). En effet, le point H étant aussi le milieu de BD (58), la similitude des triangles BCD et BIH fait voir évidemment que $IH = \frac{1}{2}CD$, et celle des triangles ACB et GCI prouve de même que $GI = \frac{1}{2}AB$; d'où il résulte

$$GH = GI + IH = \tfrac{1}{2}(AB + CD).$$

La droite GH, partageant aussi EF en deux parties égales (58), se trouve à égale distance des côtés parallèles du trapèze; et l'on peut dire, par conséquent, que *l'aire du trapèze se mesure par le produit de sa hauteur multipliée par une ligne menée à égale distance des deux bases parallèles.*

THÉORÈME.

176. *Les aires des polygones semblables sont entre elles comme les carrés des côtés homologues de ces polygones.*

Démonstration. — 1°. Si les polygones proposés sont des triangles quelconques ABC et *abc* (*fig.* 101), les triangles rectangles BDC et *bdc*, formés par les hauteurs des premiers, seront semblables comme ayant, outre les angles droits D et d, les angles égaux B et b : on aura donc

$$CD : cd :: BC : bc;$$

mais, par la similitude des triangles ABC et abc, on a aussi

$$AB : ab :: BC : bc.$$

Multipliant ces proportions par ordre, et divisant par 2 les termes du premier rapport de la proportion composée, il viendra

$$\tfrac{1}{2}\overline{AB} \times \overline{CD} : \tfrac{1}{2}\overline{ab} \times \overline{cd} :: \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2,$$

résultat dont les deux premiers termes expriment les aires respectives des triangles ABC et abc (171). Donc

$$ABC : abc :: \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2.$$

2°. Deux polygones semblables ABCDE et $abcde$ (*fig.* 51), étant partagés en un même nombre de triangles semblables (89) et semblablement disposés, chaque triangle du premier polygone sera à son correspondant, dans le second, comme le carré de l'un des côtés du premier polygone est au carré du côté homologue du second; on aura

$$ABC : abc :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2,$$
$$AEC : aec :: \overline{AE}^2 : \overline{ae}^2,$$
$$EDC : edc :: \overline{ED}^2 : \overline{ed}^2.$$

Mais la similitude des polygones donne cette suite de rapports égaux :

$$AB : ab :: AE : ae :: ED : ed,$$

de laquelle on tire

$$\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 :: \overline{AE}^2 : \overline{ae}^2 :: \overline{ED}^2 : \overline{ed}^2;$$

ce qui prouve l'égalité des rapports de chaque triangle de l'un des polygones à son correspondant dans l'autre, et d'où il résulte

$$ABC : abc :: AEC : aec :: EDC : edc.$$

On déduira de cette dernière suite de rapports égaux,

$$ABC + AEC + EDC : abc + aec + edc :: ABC : abc,$$

ou

$$ABCDE : abcde :: ABC : abc :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2.$$

Le même raisonnement aurait évidemment lieu, quel que fût le nombre des côtés des polygones proposés.

THÉORÈME.

177. *Les aires de deux triangles qui ont un angle commun sont dans le rapport des produits des côtés qui comprennent cet angle.*

Démonstration. — En menant les hauteurs CD et FG (*fig.* 101) des triangles ABC et AEF, on forme les triangles semblables ACD et AFG, qui donnent

$$CD : FG :: AC : AF;$$

et par le n° 171, il vient

$$ABC : AEF :: AB \times CD : AE \times FG.$$

Si l'on multiplie ces deux proportions par ordre, en supprimant le facteur CD, commun aux antécédents, et le facteur FG, commun aux conséquents, il en résulte, conformément à l'énoncé, que

$$ABC : AEF :: \overline{AB} \times \overline{AC} : \overline{AE} \times \overline{AF}.$$

THÉORÈME.

178. *Le carré* AEHL (fig. 102), *construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle* ABE, *est équivalent à la somme des carrés* ABCD *et* BEFG, *construits sur les deux autres côtés de ce triangle.*

Démonstration. — On serait en droit de conclure cette proposition de celle du n° 75, puisqu'il a été prouvé dans ce numéro, que $\overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{AE}^2$, et que, d'après le nº 169, $\overline{AB}^2$, $\overline{BE}^2$, $\overline{AE}^2$ sont les mesures respectives des carrés ABCD, BEFG, AEHL; mais ces considérations supposant les lignes et les aires rapportées à des nombres, j'ai jugé convenable de démontrer la proposition immédiatement sur les aires, ainsi qu'Euclide l'a fait, et sans employer des rapports de lignes.

Pour cela il faut, de l'angle droit B du triangle ABE abaisser sur l'hypoténuse AE la perpendiculaire BK et la prolonger jusqu'en I, puis mener les droites DE et BL. Le triangle DAE, ayant même base AD que le carré ABCD, et étant compris entre les mêmes parallèles AD et CE, sera équivalent à la moitié de ce carré (162); de même, le triangle BAL sera équivalent à la moitié du rectangle AKIL, construit sur sa base AL, et compris entre les mêmes parallèles AL et BI. Or les triangles DAE et BAL sont égaux (16), parce que l'angle DAE, composé de l'angle droit DAB et de l'angle BAE, est nécessairement égal à l'angle BAL, composé aussi d'un angle droit EAL et de l'angle BAE, et que les côtés AD et AB, AL et AE sont respectivement égaux comme côtés d'un même carré : donc la moitié du carré ABCD est équivalente à celle du rectangle AKIL; donc le carré ABCD sera lui-même équivalent au rectangle AKIL. On prouvera de même que le carré BEFG est équivalent au rectangle EHIK; et il résultera de là que le carré AEHL, composé des deux rectangles AKIL et EHIK, est équivalent à la somme des carrés ABCD et BEFG.

179. 1er *corollaire.* — Les rectangles AKIL, EHIK et le carré AEHL, ayant même hauteur AL, sont entre eux comme leurs bases (170); en sorte qu'on a

$$ABCD : BEFG : AEHL :: AK : KE : AE ;$$

c'est-à-dire que les carrés construits sur les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle sont au carré construit sur l'hypoténuse comme les segments adjacents AK et KE sont à l'hypoténuse entière AE.

180. 2e *corollaire.* — Puisque les aires des polygones semblables sont entre elles comme les carrés des côtés homologues de ces polygones (176), si l'on construit sur les côtés de l'angle droit du triangle rectangle ABE (*fig.* 103), et sur son hypoténuse AE, trois polygones semblables, X, Y, Z, on aura

$$X : \overline{AB}^2 :: Y : \overline{BE}^2 :: Z : \overline{AE}^2 ;$$

d'où l'on tirera

$$X + Y : \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 :: Z : \overline{AE}^2 ;$$

et du théorème précédent, qui donne $\overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{AE}^2$, on conclura $X + Y = Z$; c'est-à-dire que le polygone construit sur l'hypoténuse est équivalent à la somme des deux autres.

PROBLÈME.

181. *Construire un polygone semblable à un autre, et dont l'aire soit dans un rapport donné avec celle du premier, ou soit équivalente à un carré donné.*

Solution. — Dans le premier cas, si *bc* (*fig.* 104) désigne l'un des côtés du polygone donné, et que l'aire de ce polygone soit à celle du polygone cherché dans le rapport de deux droites quelconques M et N, on prendra sur une droite indéfinie AE deux parties AK et KE qui soient dans le même rapport; sur leur somme AE, comme diamètre, on décrira une demi-circonférence; on élèvera la perpendiculaire BK; on tirera les cordes AB et BE; enfin, on portera sur AB, de B en C, le côté *bc* de la première figure, et ayant mené CD parallèle à AE, on aura en BD le côté qui, dans le polygone cherché, est homologue à *bc*. La question sera donc ramenée à construire sur BD un polygone semblable au polygone X, ce qui s'effectuera par le procédé du n° 90.

Pour prouver la construction précédente, on déduit d'abord des triangles ABE et CBD, semblables entre eux, les proportions

$$AB : BE :: BC : BD \quad \text{et} \quad \overline{AB}^2 : \overline{BE}^2 :: \overline{BC}^2 : \overline{BD}^2.$$

Mais, par le n° 179,

$$\overline{AB}^2 : \overline{BE}^2 :: AK : KE, \quad \text{ou} \quad :: M : N;$$

donc

$$\overline{BC}^2 : \overline{BD}^2 :: M : N;$$

donc (176) le polygone construit sur BC sera un polygone construit sur BD, dans le rapport de M à N, comme le demande l'énoncé de la question.

Si le côté *bc* de la figure X excédait AB, on prolongerait cette ligne en C′, mais la construction et la démonstration ne changeraient pas pour cela.

Dans le cas où l'aire du polygone demandé devrait être équivalente à un carré donné N^2, on transformerait aussi en un carré le polygone donné, et M^2 représentant ce carré, il faudrait qu'on eût

$$\overline{BC}^2 : \overline{BD}^2 :: M^2 : N^2;$$

d'où il suit

$$M : N :: BC : BD.$$

Ainsi, BD s'obtiendrait alors par les lignes proportionnelles (62), ou bien on pourrait prendre AK et KE dans le rapport des carrés M^2 et N^2.

THÉORÈME.

182. *L'aire d'un polygone régulier a pour mesure la moitié du produit de son contour par le rayon du cercle inscrit.*

Démonstration. — Ce polygone peut être partagé en autant de triangles égaux qu'il a de côtés (139); l'un de ces triangles, ABO (*fig.* 79), est mesuré par $\frac{1}{2}\,\overline{AB} \times \overline{OG}$; en répétant ce produit autant de fois que le polygone a de côtés, on aura, si N en désigne le nombre,

$$\tfrac{1}{2}\,N \times \overline{AB} \times \overline{OG}\,;$$

mais $N \times AB$ sera le contour ou le *périmètre* du polygone : en le représentant par P, il viendra donc

$$\tfrac{1}{2}\,P \times \overline{OG}\,,$$

comme le porte l'énoncé de la proposition.

Le rayon du cercle inscrit se nomme aussi *apothème*; et l'on dit, en conséquence, que *l'aire d'un polygone régulier a pour mesure la moitié du produit de son périmètre par son apothème.*

183. *Corollaire.* — Il suit du théorème précédent et du n° **140**, que les aires des polygones réguliers d'un même nombre de côtés, étant entre elles comme les carrés de leurs côtés, sont aussi entre elles comme les carrés des rayons des cercles dans lesquels ils sont inscrits ou auxquels ils sont circonscrits. En effet, on a successivement

$$\text{ABCDEF} : abcdef :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2,$$
$$AB : ab :: AO : ao\ (\mathbf{140}),$$
$$\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 :: \overline{AO}^2 : \overline{ao}^2;$$

d'où il résulte

$$\text{ABCDEF} : abcdef :: \overline{AO}^2 : \overline{ao}^2.$$

On trouve de même

$$\text{ABCDEF} : abcdef :: \overline{OG}^2 : \overline{og}^2,$$

en observant que (**140**)

$$AO : ao :: OG : og.$$

184. *Remarque.* — En appliquant la proposition du numéro précédent aux polygones réguliers inscrits et circonscrits au même cercle, on reconnaît qu'il est toujours possible de trouver deux polygones du même nombre de côtés, l'un inscrit, l'autre circonscrit, tels que la différence de leurs aires soit moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite que soit cette grandeur.

En effet, on a évidemment, dans la *fig.* 87,

$$ABCDE : abcde :: \overline{Oa}^2 : \overline{OG}^2;$$

désignant par P l'aire du polygone circonscrit, et par p celle du polygone inscrit, on aura

$$P : p :: \overline{Oa}^2 : \overline{OG}^2,$$

$$P - p : P :: \overline{Oa}^2 - \overline{OG}^2 : \overline{Oa}^2,$$

d'où

$$P - p = \frac{P(\overline{Oa}^2 - \overline{OG})^2}{\overline{Oa}^2},$$

valeur dans laquelle on peut rendre le facteur $\overline{Oa}^2 - \overline{OG}^2$ aussi petit qu'on voudra, en multipliant les côtés des polygones.

185. *Corollaire.* — Le polygone circonscrit étant visiblement plus grand que le cercle, tandis que le polygone inscrit est moindre, il suit de ce qui précède que l'on peut toujours assigner un polygone régulier, soit inscrit, soit circonscrit, dont l'aire diffère aussi peu qu'on voudra de celle d'un cercle donné. Il suffit, pour cela, de prendre le polygone d'un assez grand nombre de côtés, pour que la différence entre le polygone inscrit et le polygone circonscrit ne surpasse pas la quantité assignée.

THÉORÈME.

186. *Si trois grandeurs* A, B, X *sont telles, que la première* A, *que l'on suppose variable, mais néanmoins surpassant toujours chacune des deux autres* B, X, *qui ne changent point, puisse approcher de toutes deux en même temps, aussi près qu'on voudra, on aura nécessairement* B = X.

Démonstration. — Soit, 1°. $X > B$; on aura, d'après cette hypothèse et en vertu de l'énoncé,

$$A > X, \quad X > B;$$

d'où il résulte que si l'on prend A de manière que la différence $A - B$ soit moindre qu'une quantité quelconque δ, ce qu'on regarde comme toujours possible, la différence $X - B$ sera, à plus forte raison, moindre que δ.

2°. Soit $X < B$, on aura alors

$$A > B, \quad B > X;$$

et prenant A de manière que $A - X$ soit moindre que δ, à plus forte raison la différence $B - X$ sera-t-elle moindre que δ.

Le raisonnement ci-dessus conduisant à prouver que la différence des deux grandeurs invariables B et X est nécessairement moindre que toute grandeur donnée, quelque petite que soit cette grandeur, il s'ensuit que $B = X$ (153).

THÉORÈME.

187. *L'aire d'un cercle a pour mesure la moitié du produit de la circonférence par le rayon, ou* $\frac{1}{2}$ CR, *en nommant* C *la circonférence, et* R *le rayon.*

Démonstration. — En effet, plus le nombre des côtés du polygone circonscrit augmente, plus aussi son périmètre A approche de la circonférence (152), et plus le produit $\frac{1}{2}$ PR approche de $\frac{1}{2}$ CR, qu'il surpassera toujours, mais d'aussi peu qu'on voudra. D'un autre côté, l'aire du même polygone, toujours plus grande que celle du cercle, peut approcher de cette dernière aussi près qu'on voudra (185) : les produits $\frac{1}{2}$PR, $\frac{1}{2}$CR et la vraie mesure de l'aire du cercle sont donc trois quantités placées dans les mêmes circonstances que les quantités A, B et X du numéro précédent : donc le produit $\frac{1}{2}$CR est égal à la vraie mesure de l'aire du cercle (1).

(1) On prouve immédiatement que la mesure de l'aire du cercle ne peut être ni plus grande ni plus petite que $\frac{1}{2}$ CR ; car si le premier cas avait lieu, $\frac{1}{2}$ CR serait alors la mesure d'un cercle plus petit que celui dont le rayon $= R$, tandis qu'en inscrivant dans le dernier un polygone plus

188. *Corollaire.* — Il suit de là que les aires des cercles sont entre elles comme les carrés de leurs rayons ou de leurs diamètres. En effet, puisque l'on a cette proportion (154),

$$C : C' :: R : R',$$

si on la multiplie par la proportion

$$\tfrac{1}{2}R : \tfrac{1}{2}R' :: R : R',$$

qui est évidente, il viendra

$$\tfrac{1}{2}CR : \tfrac{1}{2}C'R' :: R^2 : R'^2,$$

proportion dans laquelle les deux termes du premier rapport sont, d'après ce qui précède, les mesures des aires des cercles dont les rayons sont R et R'. De plus, il est visible qu'on a

$$R^2 : R'^2 :: D^2 : D'^2,$$

en désignant par D et D' les diamètres, puisque $D = 2R$, $D' = 2R'$: donc $\tfrac{1}{2}CR : \tfrac{1}{2}C'R' :: D^2 : D'^2$, ce qui complète l'énoncé de la proposition.

Si l'on représente par π la circonférence dont le diamètre est 1, la surface de ce cercle sera $\tfrac{1}{4} \times \pi = \tfrac{1}{4}\pi$: on aura donc

$$\tfrac{1}{4}\pi : \tfrac{1}{2}C'R' :: 1 : D'^2, \quad \text{d'où} \quad \tfrac{1}{2}C'R' = \tfrac{1}{4}\pi D'^2,$$

ce qui montre que *l'aire d'un cercle est égale au carré du diamètre multiplié par le* $\tfrac{1}{4}$ *du rapport de la circonférence au diamètre.* En mettant pour D'^2 sa valeur $4R'^2$, on aura $\pi R'^2$, ou le *carré du rayon multiplié par le rapport de la circonférence au diamètre.*

---

grand que l'autre cercle (*voyez* la note page 103), ce polygone aurait néanmoins pour mesure un produit moindre que $\tfrac{1}{2}CR$, puisque son contour et son apothème sont respectivement moindres que C et R.

On ne peut pas supposer non plus que le produit $\tfrac{1}{2}CR$ soit la mesure d'un cercle plus grand que le proposé; car, en inscrivant dans le plus grand cercle un polygone qui surpasse le cercle proposé, ce polygone aurait une mesure plus grande que celle qu'on assigne au cercle dans lequel il est inscrit.

Enfin, si l'on remplace R' par sa valeur $\frac{C'}{2\pi}$ (155), il en résultera $\frac{C'^2}{4\pi}$ pour l'aire du cercle exprimée par sa circonférence.

THÉORÈME.

189. *L'aire de la figure* AFBO (fig. 105), *terminée par les deux rayons* AO, BO, *faisant entre eux un angle quelconque, et par l'arc de cercle* AFB, *figure que l'on nomme* secteur de cercle, *a pour mesure la moitié du produit de l'arc* AFB *par le rayon* AO.

Démonstration. — Si par le centre O l'on élève DO perpendiculaire sur le diamètre AE, les côtés de l'angle droit AOD et l'arc ABD comprendront évidemment entre eux le quart de l'aire du cercle; et le raisonnement du n° 109 prouve que l'aire du secteur AFBO est à celle du secteur AOD dans le rapport de l'arc AFB à l'arc ABD. Mais puisque l'aire du secteur AOD est le quart de celle du cercle, on aura

$$AOD = \tfrac{1}{4} \times \tfrac{1}{2} C \times \overline{AO} = \tfrac{1}{8} C \times \overline{AO},$$

et la proportion énoncée ci-dessus,

$$AFBO : AOD :: AFB : ABD \text{ ou } \tfrac{1}{4} C,$$

deviendra

$$AFBO : \tfrac{1}{8} C \times \overline{AO} :: AFB : \tfrac{1}{4} C;$$

ce qui donnera

$$AFBO = \tfrac{1}{2} \overline{AFB} \times \overline{AO},$$

comme le porte l'énoncé de la proposition.

190. *Remarque.* — On obtiendra l'espace AFBA, compris entre l'arc AFB et la corde AB, en retranchant de l'aire du secteur AFBO celle du triangle ABO.

Cette dernière sera exprimée par $\frac{1}{2} \overline{BG} \times \overline{AO}$, si BG est perpendiculaire sur AO (171); et en retranchant sa valeur de celle du secteur AFBO (189), on aura

$$\text{AFBA} = \tfrac{1}{2}\,\overline{\text{AFB}} \times \overline{\text{AO}} - \tfrac{1}{2}\,\overline{\text{BG}} \times \overline{\text{AO}} = \tfrac{1}{2}\,(\text{AFB} - \text{BG})\,\text{AO},$$

c'est-à-dire *la moitié du produit de la différence entre l'arc* AFB *et la perpendiculaire* BG *par le rayon* AO (1).

N. B. — L'espace AFBA se nomme le *segment*, et la portion FH du rayon OF, perpendiculaire sur la corde AB, est la *flèche*.

(1) La perpendiculaire BG est employée dans la *Trigonométrie*: c'est le *sinus* de l'arc AFB.

DEUXIÈME PARTIE.

SECTION PREMIÈRE.

DES PLANS ET DES CORPS TERMINÉS PAR DES SURFACES PLANES.

N. B. — Dans tout ce qui va suivre, les figures embrassent l'espace avec ses trois dimensions. Les lignes ponctuées sont celles qui passent derrière des plans.

Des plans et des lignes droites.

191. Puisque la ligne droite s'applique exactement au plan, dans tous les sens (2), il est évident que dès qu'une ligne droite a deux de ses points dans un plan, elle y est tout entière, sans quoi on pourrait mener par deux points plusieurs lignes droites, l'une qui serait tirée, dans le plan même, par les deux points donnés, et les autres qui auraient des prolongements hors du plan, ce qui ne saurait s'accorder avec l'idée qu'on a de la ligne droite.

192. L'intersection de deux plans est une ligne droite; elle est premièrement une ligne d'après les définitions du n° 1; et si l'on conçoit que, par deux points de cette intersection, on tire une droite, elle sera en même temps dans l'un et dans l'autre plan (numéro précédent): elle ne pourra donc être que leur intersection.

193. Par une même ligne droite AB (*fig.* 106), on peut faire passer une infinité de plans différents, CD, EF, GH, etc. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer qu'un plan peut toujours tourner autour d'une droite tirée par deux de ses points, et prendre ainsi un nombre infini de positions différentes, sans que les points de la droite changent de place; mais on conçoit que le plan s'arrêtera si l'on fixe, hors de cette ligne, un point par lequel il doive passer. Il résulte de là qu'un plan est donné lorsqu'on connaît trois points par lesquels il doit passer, comme une ligne droite l'est par deux.

On peut aussi le prouver en montrant que deux plans qui ont trois points communs, A, B, C (*fig.* 107), se confondent dans toute leur étendue; et, pour cela, il suffit d'observer que si, par un point quelconque E, pris sur un de ces plans, on mène une droite EF rencontrant deux des trois lignes AB, AC et BC, qui joignent deux à deux les points communs, et qui, par cette raison, sont à la fois sur les deux plans (191), cette droite sera aussi commune aux mêmes plans, puisqu'elle y aura les deux points *e* et *f*, où elle coupe AB et BC.

194. Deux lignes qui se coupent sont, par conséquent, dans un même plan; car, en faisant passer un plan par l'une d'elles, AB par exemple, et par un point C pris sur BC, cette dernière ayant deux de ses points, B et C, dans le plan, y sera tout entière (191).

Il est évident par là qu'en joignant deux à deux, par des droites, trois points pris d'une manière quelconque dans l'espace, le triangle résultant ABC sera tout entier dans un même plan.

Il n'en est pas ainsi de quatre points pris au hasard : le plan qui passe par trois d'entre eux ne passe pas toujours par le quatrième; et, dans ce cas, le quadrilatère qui en résulte, n'étant pas dans un plan, se nomme *quadrilatère gauche*.

195. Les parallèles sont toujours dans un même plan ·s leur définition; mais il faut bien observer que, ·'espace, deux lignes droites peuvent être perpendiculaires à une troisième, sans être parallèles et sans se rencontrer; car on peut alors mener par un seul point autant de perpendiculaires à une même droite que l'on peut faire passer de plans par cette droite, c'est-à-dire une infinité. Les droites AC, AE, AG (*fig.* 106) peuvent toutes être perpendiculaires sur AB, la première dans le plan CD, la seconde dans le plan EF, la troisième dans le plan GH. S'il en arrive autant aux lignes BD, BF et BH, BD et AC seront parallèles, comme étant perpendiculaires à la même droite AB dans le plan CD; mais ces droites ne seront parallèles à aucune des autres.

THÉORÈME.

196. *Une droite* CD (fig. 108), *élevée hors d'un plan* AB, *perpendiculairement à deux autres,* DE, DF, *menées par son pied* D *dans ce plan, est perpendiculaire à toutes celles qu'on pourrait mener par ce point dans le même plan.*

Démonstration. — Soit DG une droite menée par le point D, d'une manière quelconque, dans le plan AB; il faut tirer une droite EF qui coupe DG, prolonger au-dessous du plan AB la droite CD d'une quantité C'D = CD; tirer enfin les droites CE, CG, CF, C'E, C'G et C'F. Cela fait, puisque CD est perpendiculaire sur DE et sur DF, celles-ci le seront sur CC' (13); les obliques CE et C'E, CF et C'F seront égales comme s'écartant également du pied de la perpendiculaire (27); et, de plus, le côté EF étant commun aux triangles CEF et C'EF, ils auront tous leurs côtés égaux chacun à chacun, et seront par conséquent égaux (20) : leurs angles CEF et C'EF seront donc égaux. Il en sera de même des triangles CEG et C'EG, dans lesquels ces angles sont compris entre un côté commun EG et deux côtés égaux CE et C'E (16). Il suit de là que les côtés CG et C'G sont égaux; et comme ils s'écartent également du point D, il en résulte que la droite DG est perpendiculaire sur CD (27), et réciproquement, CD sur DG (1).

197. *Remarque.* — La ligne CD tombant à angle droit sur toutes celles que l'on peut mener par son pied dans ce plan, et n'inclinant, par conséquent, d'aucun côté vers le plan, lui est *perpendiculaire.*

THÉORÈME.

198. *Si trois droites,* ED, FD, GD (fig. 109), *sont perpendiculaires à une même droite* CD, *par un même point* D, *elles sont toutes les trois dans un même plan perpendiculaire à cette dernière.*

Démonstration. — Si cela n'était pas, on pourrait, par les deux droites ED et FD, mener un plan AB auquel CD serait perpendiculaire, et qui couperait le plan GDC mené par GD et CD, dans une droite G′D qui serait aussi perpendiculaire sur CD (196) : on aurait donc alors, sur la même droite CD, par le même point D, et dans le même plan, deux perpendiculaires, GD, G′D, ce qui est impossible (32).

THÉORÈME.

199. *Par un point pris, soit hors d'un plan, soit sur ce plan, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à ce plan; et, par le même point d'une droite, il ne peut passer qu'un seul plan perpendiculaire à cette droite.*

Démonstration. — Le premier cas de la proposition est presque évident par lui-même; car si, par le point C (*fig.* 108), on pouvait abaisser sur le plan AB une autre perpendiculaire que CD, CG par exemple, cette droite

(1) Cette démonstration, du même genre que celle d'Euclide, mais plus simple, m'a été communiquée par M. Cauchy, alors fort jeune et déjà très distingué.

serait aussi perpendiculaire sur GD, et le triangle CGD aurait deux angles droits, conséquence absurde (52).

Dans le deuxième cas, si, par la seconde perpendiculaire C′D (*fig.* 109), et par la première CD, on faisait passer un plan, il faudrait que les deux droites CD et C′D fussent en même temps perpendiculaires à la droite DE, dans laquelle il rencontrerait le plan AB, conséquence encore absurde. L'énoncé de la proposition est donc vrai dans ses deux premières parties.

A l'égard de la troisième, si, par le point D, on pouvait mener, perpendiculairement à CD, un autre plan que AB, qu'on tirât par ce point, dans le premier, une droite quelconque GD; alors le plan GDC, mené par cette droite et par la perpendiculaire CD, rencontrant le plan AB dans une droite G′D différente de GD, il s'ensuivrait que deux droites G′D et GD, comprises dans le même plan que CD, seraient perpendiculaires au même point de cette droite, ce qui est absurde (32).

THÉORÈME.

200. *Les obliques qui s'écartent également de la perpendiculaire à un plan sont égales; celles qui s'en écartent le plus sont les plus longues, et la perpendiculaire est la plus courte de toutes les droites que l'on peut mener d'un point donné à un plan.*

Démonstration. — La perpendiculaire étant CD (*fig.* 110): 1°. Tous les points situés sur la circonférence du cercle EF, décrit du point D comme centre, sont également éloignés du point C, puisque, les angles en D étant droits, les triangles CDE et CDF seront égaux comme ayant le côté CD commun et les côtés DE, DF égaux: donc CE = CF.

2°. Si l'on joint le point G, extérieur au cercle, avec le centre D, la droite GC, située dans le même plan que les droites CF et CD, sera plus longue que CF (27).

3°. La ligne CD, évidemment plus courte que CF, sera nécessairement plus courte que toutes celles que l'on peut mener du point C sur le plan AB.

201. *Remarques.*— Chaque point de la droite CD, étant également éloigné de tous ceux de la circonférence EF, peut être employé à la description de cette circonférence, comme le centre D.

C'est par ce moyen qu'on abaisserait une perpendiculaire sur un plan, par un point extérieur : d'abord, du point C on décrirait sur le plan AB un cercle dont on chercherait le centre D ; et en le joignant avec le point C, on aurait la droite CD perpendiculaire sur le plan AB.

La perpendiculaire CD, étant la plus courte ligne que l'on puisse mener du point C sur le plan AB, offre la mesure naturelle de la distance du point C à ce plan.

THÉORÈME.

202. *Si d'un point* C *de la droite* CG, *oblique au plan* AB (fig. 111), *on abaisse sur ce plan la perpendiculaire* CD, *et que l'on joigne les points* G *et* D *par une droite, la droite* EF, *menée dans le plan* AB *perpendiculairement à* GD, *sera aussi perpendiculaire sur* CG.

Démonstration. — Ayant pris GE = GF, et tiré les droites ED, FD dans le plan AB, on aura ED = FD (27). Menant ensuite les obliques CE et CF, elles seront égales, puisqu'elles s'écarteront également de la perpendiculaire CD (200) ; mais en les considérant, par rapport à CG, dans le plan ECF, elles s'écarteront également du pied G de la droite CG, qui sera, par conséquent, perpendiculaire sur EF (30).

THÉORÈME.

203. *Une droite* DE (fig. 112), *située hors d'un plan* AB, *mais parallèle à une ligne quelconque* AC *menée dans ce plan, ne le rencontre point, quelque prolongée*

qu'on la suppose, et est en même temps parallèle à toute droite BF *menée dans le plan* AB, *parallèlement à* AC.

Démonstration. — 1°. La droite DE, se trouvant avec la droite AC dans un même plan AD, ne pourrait rencontrer le plan AB que dans son intersection avec le précédent, c'est-à-dire sur AC; mais, par l'hypothèse, DE ne pouvant rencontrer AC, ne rencontrera pas non plus le plan AB.

2°. Si, par la droite DE et par l'un des points B de la droite BF, supposée parallèle à AC, dans le plan AB, on mène le plan D*f*, la droite B*f* sera nécessairement parallèle à DE, puisqu'il vient d'être prouvé que DE ne saurait rencontrer le plan AB dans lequel B*f* est aussi contenue; et, d'après ce qui précède, la ligne AC, parallèle à DE, ne pouvant pas non plus rencontrer le plan D*f* qui contient cette dernière, ne saurait, par conséquent, rencontrer la droite B*f* qui s'y trouve aussi. Les droites AC et B*f* contenues dans le même plan AB, ne se rencontrant point, seront donc parallèles; et comme on ne peut mener par le point B qu'une seule parallèle à AC (40), il s'ensuit que B*f* se confond avec BF, ou que DE est parallèle à BF, deuxième partie de la proposition.

204. *Corollaire.* — Il est évident par là que deux droites DE et BF, parallèles à une troisième AC, sont parallèles entre elles; car en imaginant un plan AB qui passe par les droites BF et AC, la droite DE remplira les conditions de l'énoncé du théorème ci-dessus.

THÉORÈME.

205. *Les angles* BCD *et* FAE, *qui ont les côtés parallèles et l'ouverture tournée dans le même sens, sont égaux, quoique situés dans des plans différents.*

Démonstration. — Si, par les côtés parallèles CD et

AE, CB et AF, on fait passer deux plans AD et AB, qu'on prenne CD = AE, CB = AF, et qu'on mène DE, BF, DB, EF, les figures ACDE, ACBF seront des parallélogrammes (79); les côtés DE et BF seront, par conséquent, égaux à AC, parallèles entre eux (numéro précédent), et formeront un parallélogramme dans lequel on aura DB = EF. Les triangles DCB et EAF, ayant donc leurs côtés égaux chacun à chacun, seront égaux et donneront BCD = FAE.

THÉORÈME.

206. *Si dans chacun des plans* AB *et* AD *on mène, par un point quelconque* H *de leur commune section* AC, *des droites* IH *et* HG *perpendiculaires à cette commune section, et que l'angle* IHG *qu'elles forment entre elles soit égal à l'angle ihg que forment les droites ih et hg, menées de la même manière dans les plans ab et ad, par rapport à la commune section ac de ceux-ci, on pourra faire coïncider les deux premiers plans avec les deux derniers.*

Démonstration. — Si l'on applique le plan *ab* sur AB, de manière que *ac* tombe sur AC, et que le point *h* soit sur le point H, la droite *hg* coïncidera nécessairement avec HG, puisque les angles *ahg* et AHG sont tous deux droits. De plus, les droites IH et HG, perpendiculaires à AH, déterminent un plan GHI perpendiculaire à cette droite (198); les droites *ih* et *hg* en déterminent pareillement un autre *ghi*, perpendiculaire à *ah*. Mais lorsque *ah* est confondue avec AH, les plans GHI et *ghi* doivent se confondre aussi, sans quoi il serait possible de mener par le même point H deux plans perpendiculaires à la même droite (199); et comme les angles GHI et *ghi* sont égaux par l'hypothèse, il s'ensuit que, *hg* coïncidant avec HG, *ih* doit aussi coïncider avec IH: d'où il est évident que les plans *ad* et AD coïncident aussi, puisque les deux droites *ah* et *ih*, placées dans le premier, se confondent avec les deux droites AH et IH, placées dans le second (194).

207. 1er *corollaire.* — Il suit de là que l'espace compris entre deux plans AB et AD qui se coupent, considéré entre ces limites, peut, quoique indéfini dans les autres sens, être comparé à tout autre espace terminé de la même manière. Cet espace, qui est à l'égard des plans ce que l'angle est à l'égard des droites (7) constitue l'*angle de ces plans*, et en mesure l'*inclinaison*.

Je le nommerai désormais *angle dièdre*, c'est-à-dire *angle à deux faces;* et je le désignerai par quatre lettres, dont les deux du milieu marqueront la commune section des plans, ou l'*arête* de l'angle dièdre (1). L'angle formé par les plans AB et AE (*fig.* 113), qui se rencontrent suivant la ligne AG, sera l'angle dièdre BGAE ou DHGC.

Il suit encore du numéro précédent, que l'angle CHD, formé par les droites HD et HC, menées perpendiculairement à la commune section AG, des plans AB et AE, est la mesure naturelle de l'angle dièdre qu'ils comprennent entre eux; car il est visible que si l'on fait tourner le plan AE autour de la droite AG, commune section des deux plans proposés, ou arête de l'angle dièdre, la droite HC, qui coïncidera avec HD lorsque le plan AE sera couché sur AB, décrira dans ce mouvement un plan perpendiculaire à AG (198), et viendra se placer en HF, dans le prolongement de HD, lorsque le plan AE se trouvera dans celui de AB: en sorte que l'angle CHD commence, augmente et finit avec celui des plans. De plus, si l'on compare l'angle de deux plans *ab*

(1) On le nomme ordinairement *angle plan*: mais cette expression est très-vicieuse; car elle n'offre que l'idée d'un angle contenu dans un plan, et, par conséquent, celle de l'angle formé par deux droites. Le mot *dièdre* est composé de deux mots grecs dont le premier signifie *deux*, et le second *face* ou *base*.

et *ae* avec celui de deux autres plans AB et AE, on trouvera que le rapport de ces angles dièdres est le même que le rapport des angles *chd* et CHD. En effet, lorsque ces angles sont commensurables entre eux, qu'on les divise en parties qui soient aliquotes de l'un et de l'autre, par les droites *hd′*, HD′, HD″, et que l'on mène, par la commune section *ag* et par *hd′*, le plan *ad′*, par la commune section AG et par HD′, HD″, les plans AD′, AD″, on formera d'une part les angles dièdres *dhgd′*, *d′hgc*, et de l'autre les angles dièdres DHGD′, D′HGD″, D″HGC, qui seront tous égaux (206); et l'angle dièdre *dhgc* sera à l'angle dièdre DHGC comme le nombre des parties contenues dans l'angle *chd* est au nombre des parties contenues dans l'angle CHD.

Si les angles *chd* et CHD n'étaient pas commensurables entre eux, un raisonnement absolument semblable à celui du n° 109 prouverait que leur rapport ne saurait être ni plus petit ni plus grand que le rapport des angles dièdres *bgae* et BGAE. Il résulte donc de là que l'*angle dièdre a pour mesure l'angle plan formé par deux droites menées dans chacune de ses faces, perpendiculairement à leur commune section et par un même point de cette droite.*

Il est évident que les angles dièdres jouissent des mêmes propriétés que les angles plans qui les mesurent; les angles dièdres LGAK et BGAE par exemple, opposés par l'arête GA, sont égaux, puisqu'ils ont pour mesures les angles plans IHF et CHD, opposés par le sommet.

208. 2ᵉ *corollaire.* — Un plan CD mené par la ligne FG perpendiculaire au plan AB (*fig.* 114) ne penche d'aucun côté de ce dernier, auquel il est par conséquent *perpendiculaire;* car si l'on mène dans le plan AB, perpendiculairement à CE, la droite FK, et qu'on la prolonge en L, les angles GFK et GFL étant droits (196), il résulte du numéro précédent, que les angles dièdres

ACED et BECD, formés par le plan CD sur les deux parties AE et CB du plan AB, sont égaux comme droits.

Il est visible que, par la droite CE, prise dans le plan AB, on ne peut élever perpendiculairement sur celui-ci que le seul plan CD.

THÉORÈME.

209. *Si, par un point quelconque de la commune section* CE *des deux plans* AB, CD, *qui se rencontrent à angle droit, on élève perpendiculairement au premier une droite* FG, *cette droite sera comprise dans le second.*

Démonstration. — En effet, si elle n'y était pas, on pourrait encore, par cette ligne et par la ligne CE, mener un second plan perpendiculaire à AB, ce qui est absurde (numéro précédent).

La droite FG est d'ailleurs perpendiculaire sur la commune section CE (196).

210. *Corollaire.* — Il suit de là que l'intersection GH (*fig.* 115) de deux plans CD et EF perpendiculaires à un troisième AB est perpendiculaire à ce dernier; car la perpendiculaire élevée par le point G du plan AB devant, par le numéro précédent, se trouver en même temps dans le plan CD et dans le plan EF, ne peut être que leur commune section GH.

THÉORÈME.

211. *La droite* FG (fig. 114), *menée perpendiculairement à* CE *dans le plan* CD *qui rencontre le plan* AB *à angle droit, est perpendiculaire à ce dernier.*

Démonstration. — Si, par le point F, on mène dans le plan AB la droite FK perpendiculaire à CE, l'angle GFK sera nécessairement droit, puisque le plan CD est, par l'hypothèse, perpendiculaire sur AB (208). La ligne GF, se trouvant donc en même temps perpendiculaire aux deux droites CE et KL menées dans le plan AB, sera aussi perpendiculaire à ce plan (196).

THÉORÈME.

212. *Deux droites* FG *et* HI, *perpendiculaires à un même plan, sont parallèles entre elles;* et réciproquement, *si la droite* FG *est perpendiculaire au plan* AB, *et que* HI *soit parallèle à* FG, HI *sera aussi perpendiculaire au plan* AB.

Démonstration. — Si l'on joint les points F et H par la droite CE, et que l'on mène par cette ligne et par la ligne FG le plan CD, qui sera perpendiculaire à AB, il comprendra la ligne HI, puisqu'elle est aussi perpendiculaire à AB (209); et cette dernière, se trouvant alors dans le même plan que FG et perpendiculaire à la même droite CE, sera parallèle à FG (39).

Réciproquement, si les lignes FG et HI sont parallèles, le plan CD qui les contiendra sera perpendiculaire sur AB, lorsque l'une d'elles, FG par exemple, sera perpendiculaire sur ce dernier; et comme, en vertu du parallélisme, l'autre droite HI se trouvera perpendiculaire sur CE aussi bien que FG, elle sera perpendiculaire au plan AB, d'après le numéro précédent.

THÉORÈME.

213. *Deux plans perpendiculaires à une même droite* GH (fig. 116) *ne sauraient se rencontrer.*

Démonstration. — S'ils se rencontraient en effet, et que l'on joignît l'un des points de leur commune section, qu'on suppose être EF, avec les points G et H, où la perpendiculaire GH les rencontre, les droites HF et GF, qui, partant d'un même point, formeraient un triangle avec GH, seraient nécessairement dans le même plan avec cette dernière; et comme elles devraient la rencontrer à angles droits (196), il s'ensuivrait que d'un même point on pourrait abaisser dans le même plan deux perpendiculaires sur une droite, ce qui est absurde (32).

214. Deux plans perpendiculaires à une même droite, ne se rencontrant point, sont *parallèles* entre eux.

THÉORÈME.

215. *Lorsque deux plans parallèles* AB *et* CD (fig. 117) *sont coupés par un troisième* FH, *les intersections* EF *et* GH *sont parallèles entre elles.*

Démonstration. — Il est visible que les droites EF et GH, comprises dans le même plan FH, ne peuvent se rencontrer, quelque loin qu'on les prolonge, sans que les plans AB et CD, qui les contiennent respectivement, ne se rencontrent aussi; ce qui ne saurait arriver, puisqu'ils sont parallèles.

216. *Corollaire.* — Il suit de là : 1°. Que deux plans parallèles ont leurs perpendiculaires communes;

2°. Que ces perpendiculaires sont égales, d'où il résulte que la distance des plans parallèles est la même dans tous leurs points.

En effet, si l'on élève sur le plan AB (*fig.* 118) la perpendiculaire GH, et qu'on tire par son pied les droites GL et GI, les plans LGH et IGH couperont le plan CD suivant des droites HM et HK, parallèles aux droites GL et GI, du plan AB, et, par conséquent, perpendiculaires comme ces dernières à GH : donc (196) GH est perpendiculaire au plan CD en même temps qu'au plan AB.

En second lieu, si l'on élève encore sur le plan AB la perpendiculaire RS, et que l'on conçoive le plan GRS, la figure GHSR sera un parallélogramme rectangle (215), et donnera, par conséquent, GH = RS.

THÉORÈME.

217. *Si deux droites qui se coupent sont parallèles à deux autres droites qui se coupent, le plan déterminé par les deux premières sera parallèle à celui que déterminent les deux autres.*

Démonstration. — En effet, si les droites HM et HK sont parallèles aux droites AP et AN, et que l'on abaisse du point H, perpendiculairement au plan AB, la droite GH, elle sera perpendiculaire sur chacune des droites GL et GI menées dans ce plan parallèlement aux deux droites AP et AN, et qui seront parallèles aux droites HM et HK (204) : la ligne GH sera donc aussi perpendiculaire sur ces dernières, et, par conséquent, sur le plan CD qu'elles déterminent (196); les plans AB et CD, étant alors perpendiculaires à la même droite GH, seront donc parallèles (214).

218. *Corollaire.* — Il suit de là que, par deux droites HQ et GI (*fig.* 119), qui, ne se coupant point et n'étant point parallèles, ne sauraient être comprises dans un même plan, on peut toujours faire passer deux plans parallèles, dont la plus courte distance donne celle des deux droites proposées.

En effet, si l'on mène par un point quelconque M de la droite HQ une ligne MD parallèle à GI, et par un point quelconque R de la droite GI, une ligne RO parallèle à HQ, les droites HQ et MD, respectivement parallèles aux droites RO et GI, détermineront un plan CD, parallèle au plan AB qui passe par ces dernières.

Il est visible que les droites HQ et GI ne peuvent s'approcher de plus près que ces plans.

219. *Remarque.* — Si, par un point quelconque R de la droite GI, on mène une perpendiculaire RS sur le plan CD, le plan GS, passant par RS et par GI, sera en même temps perpendiculaire sur CD et sur AB (216), et rencontrera le premier, suivant une droite HK parallèle à GI (215), et qui coupera la droite HQ au point H, où celle-ci s'approche le plus de GI; car, si du point H on abaisse sur GI la perpendiculaire HG, elle sera perpendiculaire au plan AB (211) et, par conséquent, aussi au plan CD (216) : elle mesurera donc la plus courte distance des plans et des droites.

Il faut bien observer qu'elle est perpendiculaire en même temps aux deux droites proposées HQ et GI (196).

THÉORÈME.

220. *Deux droites* GH *et* IK, *comprises entre deux plans parallèles* AB *et* EF (fig. 120), *sont toujours coupées en parties proportionnelles, par un troisième plan* CD *parallèle aux deux premiers.*

Démonstration. — Pour le prouver, on joindra d'abord le point H et le point I par une droite HI, puis on tirera dans le plan CD, par les points L, M, N où les droites GH, HI, IK le rencontrent, les droites LM et MN que l'on pourra considérer comme les intersections du plan CD avec les plans triangulaires GHI, HIK, et qui seront, par conséquent, parallèles aux droites GI et HK, dans lesquelles GHI rencontre AB, et HIK rencontre EF (215). Le triangle GHI, ayant donc ses côtés GH et HI coupés par la ligne LM parallèle à GI, donnera

$$\text{HL} : \text{LG} :: \text{HM} : \text{MI}, \qquad \text{HL} : \text{HG} :: \text{HM} : \text{HI};$$

MN étant parallèle à HK, le triangle HIK donnera

$$\text{HM} : \text{MI} :: \text{KN} : \text{NI}, \qquad \text{HM} : \text{HI} :: \text{KN} : \text{KI};$$

d'où l'on conclura, conformément à l'énoncé,

$$\text{HL} : \text{LG} :: \text{KN} : \text{NI}, \qquad \text{HL} : \text{HG} :: \text{KN} : \text{KI}.$$

221. Lorsque plusieurs plans ASB, BSC, CSD, DSE, ESF, FSG, GSA (*fig.* 121), qui passent par le même point S, se rencontrent deux à deux, l'espace qu'ils comprennent entre eux, indéfini dans le sens opposé au point S, se nomme ordinairement *angle solide;* mais je crois devoir l'appeler *angle polyèdre,* ou angle à plusieurs faces, par la raison que j'ai déjà donné le nom d'*angle dièdre*, ou angle à deux faces, à celui que deux plans forment entre eux (1). Cette nomenclature offre d'ailleurs l'avantage de distinguer les angles de ce genre par le nombre de leurs faces. L'angle à trois faces SABC (*fig.* 122) sera nommé *angle trièdre;* un angle qui aurait quatre faces serait un *angle tétraèdre;* l'angle SABCDEFG (*fig.* 121) est un *angle eptaèdre.*

Le point S, où se rencontrent toutes les faces de l'angle, en est le *sommet;* leurs intersections successives SA, SB, SC, SD, SE, etc., sont les *arêtes* de l'angle. Ce qui constitue l'angle polyèdre SABCDEFG, et le distingue de tout autre angle composé du même nombre de faces, ce sont les angles plans ASB, BSC, CSD, etc., formés par ses arêtes consécutives, et les inclinaisons respectives de ces faces, ou les angles dièdres qu'elles forment entre elles.

Il y a donc dans l'angle trièdre six choses à considérer, savoir, trois angles plans et trois angles dièdres.

THÉOREME.

222. *La somme de deux quelconques des angles plans qui composent un angle trièdre est toujours plus grande que le troisième.*

Démonstration. — Si les angles plans ASB, ASC, BSC (*fig.* 122) étaient égaux entre eux, la proposition serait évidente par elle-même. Dans le cas contraire, soit ASB le plus grand des trois : on y mènera la droite SD,

(1) On verra plus bas des raisons assez fortes pour bannir de la Géométrie le mot *solide*, dont la signification la plus connue dans notre langue répond à une idée très-différente de celle qu'on y attache en Géométrie.

de manière que l'angle ASD soit égal à ASC; on prendra SD = SC, et l'on tirera les droites ADB, AC, BC. Les deux triangles ASC et ASD seront égaux, puisque les angles ASC et ASD, égaux par construction, se trouveront compris entre des côtés respectivement égaux; on aura donc AC = AD. Mais AC + BC > AB (15) ou AC + BC > AD + BD; retranchant, de part et d'autre, les lignes égales AC et AD, il en résultera BC > BD. Or les triangles BSC et BSD ayant les côtés SC et SD égaux entre eux et le côté SB commun, l'angle BSC, opposé au côté BC plus grand que BD, surpassera nécessairement l'angle BSD opposé à ce dernier (19); d'où il est évident que ASC + BSC = ASD + BSC surpasse ASD + BSD ou ASB.

THÉORÈME.

223. *Si deux angles trièdres* SABC, S′A′B′C′ (fig. 123) *sont formés de trois angles plans égaux chacun à chacun, les angles dièdres compris entre les angles plans égaux seront égaux, c'est-à-dire que les faces semblables seront également inclinées entre elles dans chacun des angles trièdres proposés.*

Démonstration.— Soient ASB = A′S′B′, ASC = A′S′C′, BSC = B′S′C′; si, sur les arêtes BS et B′S′, par lesquelles se joignent des angles plans égaux, on prend BS = B′S′, et que par les points B et B′ on conçoive des plans ABC, A′B′C′ perpendiculaires à ces arêtes, les triangles BSC, ASB, étant rectangles en B, comme les triangles B′S′C′, A′S′B′ le sont en B′, seront égaux à ces derniers, à cause de l'égalité des côtés BS et B′S′, et de celle des angles BSC et B′S′C′, ASB et A′S′B′ (18) : on aura donc

$$SC = S'C', \quad SA = S'A', \quad BC = B'C', \quad AB = A'B'.$$

Mais comme ASC = A′S′C′, les triangles ASC et A′S′C′ seront égaux (16), et donneront, par conséquent, AC = A′C′. Enfin, les trois côtés des triangles ABC et A′B′C′ étant égaux, les angles ABC et A′B′C′, qui mesurent les angles dièdres formés par les plans BSC et ASB, B′S′C′ et A′S′B′ (206), seront égaux, comme le porte l'énoncé de la proposition.

La construction ci-dessus, supposant que le plan ABC rencontre en même temps les arêtes SA et SC, ne peut avoir lieu lorsque les angles ASB et BSC ne sont pas tous deux aigus; mais si un seul ou tous les deux étaient obtus, on prolongerait au delà du point S, soit l'une des arêtes SA, SB, soit toutes les deux. Ces prolongements donneraient un nouvel angle trièdre, dans lequel l'angle dièdre formé sur l'arête SB serait, ou le supplément de CSBA, ou la continuation de cet angle (207). La même construction opérerait un changement analogue sur l'angle trièdre S′A′B′C′.

Quand les deux arêtes SA et SC sont perpendiculaires à SB, elles sont parallèles au plan ABC; mais alors leur angle ASC mesure l'inclinaison des plans SBA et SBC; il en est de même dans le second angle trièdre, et la proposition est évidente par elle-même.

Si un seul des angles ASB, BSC est droit, le premier par exemple (*fig.* 124), on prolongera les arêtes SA et SB s'il est nécessaire pour que les angles ASC et BSC soient aigus; on mènera d'un point quelconque de l'arête SC les plans CAD et CBD perpendiculaires, l'un sur SA, l'autre sur SB; ASB leur sera perpendiculaire (208), et ils se couperont, par conséquent, suivant une droite CD perpendiculaire à ce plan (210). Prenant $S'C' = SC$, et faisant la même construction sur l'angle trièdre S′A′B′C′, les triangles SAC et S′A′C′, SBC et S′B′C′ seront respectivement égaux, car ils ont deux angles et un côté égaux: donc

$$AC = A'C', \quad BC = B'C', \quad AS = A'S', \quad BS = B'S'.$$

Les deux dernières égalités établissent celle des rectangles

ASBD et A′S′B′D′ : donc BD = B′D′; alors les triangles CBD, C′B′D′, rectangles en D et D′, ayant chacun à chacun deux côtés égaux, dont un est hypoténuse, seront égaux (34). Ainsi, CD = C′D′, et, par conséquent, les angles CBD et C′B′D′ qui mesurent les inclinaisons des plans ASB et BSC, A′S′B′ et B′S′C′ seront égaux aussi (1).

THÉORÈME.

224. *Deux angles trièdres* SABC *et* S″A″B″C″ (fig. 123), *formés par trois angles plans égaux et semblablement disposés entre eux, sont égaux dans toutes leurs parties.*

Démonstration. — Si l'on fait coïncider les faces égales ASB, A″S″B″ par les arêtes AS et A″S″, les faces égales ASC et A″S″C″, qui sont également inclinées sur les précédentes (numéro précédent), coïncideront aussi; et à cause de l'égalité des angles plans ASB, A″S″B″, ASC, A″S″C″, les arêtes SB et S″B″, SC et S″C″ coïncideront, et, par conséquent, aussi les faces BSC et B″S″C″ déterminées par ces arêtes.

225. *Remarque.* — Il est bien important d'observer que la coïncidence des angles trièdres ne peut avoir lieu que dans le cas où les faces égales sont semblablement placées dans l'un et dans l'autre; c'est-à-dire lorsque tous deux étant posés sur des faces égales, et ayant leur sommet tourné du même côté, les angles dièdres égaux sont ouverts dans le même sens, ainsi que cela arrive à l'égard des angles SABC et S″A″B″C″, mais non pas à l'égard des angles SABC et S′A′B′C′. Dans ce dernier, l'angle dièdre

---

(1) M. Vecten, professeur au Lycée de Nîmes, m'a fait remarquer qu'en menant par le sommet S le plan perpendiculaire à l'arête SB, on pouvait former une construction applicable à tous les cas; mais la figure étant un peu plus difficile à concevoir que la *fig.* 123, j'ai cru devoir conserver ici la démonstration de Robert Simson qui, le premier, a donné ce théorème et le suivant pour remplir une lacune que présentait le 11e livre des *Éléments d'Euclide*.

que l'angle polyèdre a de faces, il restera nécessairement moins de deux fois deux angles droits ou de quatre angles droits pour la somme des angles plans ASB, BSC, etc., formés au sommet S de l'angle polyèdre SABCDE.

Des corps terminés par des plans.

227. Les corps terminés par des plans se nomment *corps polyèdres*, ou simplement *polyèdres*.

On ne peut fermer de toutes parts un espace par un nombre de plans moindre que quatre. Le corps SABC (*fig.* 126), compris entre les quatre plans ASB, ASC, BSC, ABC, se nomme *tétraèdre*.

Tout corps dont une des faces est un polygone quelconque, et dont toutes les autres sont des triangles ayant leur sommet au même point, se nomme *pyramide*. Le corps SABCDE (*fig.* 127) est une pyramide *pentagonale*, parce que sa *base* ABCDE est un pentagone; le point S, sommet commun des triangles ASB, BSC, CSD, DSE, ESA, est aussi le *sommet* de la pyramide. Le tétraèdre SABC de la *fig.* 126 est lui-même une pyramide triangulaire. Tous ses angles polyèdres n'ont que trois faces, ce qui n'a lieu que pour les angles adjacents à la base dans les autres pyramides; et l'on peut prendre pour base celle de ses faces qu'on veut.

Les tétraèdres sont dans l'espace ce que les triangles sont sur un plan; car, de même qu'on fixe la position d'un point sur un plan, en le liant par un triangle à deux points donnés, on fixe celle d'un point dans l'espace, en le liant par un tétraèdre à trois points donnés. Voici les principales propriétés des tétraèdres, jointes à quelques-unes de celles des pyramides, qui ont la plus grande analogie avec les tétraèdres.

THÉORÈME.

228. *Si les angles trièdres* S *et* S' *des tétraèdres* SABC,

S'A'B'C' (fig. 126) *sont composés de triangles égaux et semblablement disposés, ces tétraèdres seront égaux; et ils le seront encore si les faces* SAB *et* SAC *de l'un sont égales aux faces* S'A'B' *et* S'A'C' *de l'autre, assemblées de la même manière, et forment entre elles le même angle dièdre que celles-ci.*

Démonstration. — 1°. Il est évident qu'en faisant coïncider la face SAB avec la face S'A'B', les autres faces égales, étant également inclinées sur celles-ci (223), coïncideront aussi.

2°. La face SAB coïncidant avec S'A'B', la face SAC coïncidera avec S'A'C', quand l'angle dièdre CSAB sera égal à C'S'A'B'; et les droites SB et SC se trouvant alors confondues avec S'B' et S'C', les faces SBC et S'B'C' coïncideront nécessairement.

229. On donne le nom de *polyèdres semblables* à ceux dont les faces sont des polygones semblables et dont les plans sont en même nombre, semblablement disposés et également inclinés les uns à l'égard des autres, ou forment des angles dièdres égaux. On va voir que la dernière de ces conditions résulte des autres pour les tétraèdres et les pyramides (1).

THÉORÈME.

230. *Lorsque les triangles qui forment deux angles trièdres homologues de deux tétraèdres sont semblables chacun à chacun, et semblablement disposés, ces tétraèdres sont semblables; et ils le seront encore si deux faces de l'un font entre elles le même angle que deux*

(1) M. Cauchy, déjà cité (page 135), a démontré, dans le 16e cahier du *Journal de l'École Polytechnique,* qu'il en était de même pour tous les polyèdres convexes, ce qui était supposé sans preuve, dans les *Éléments d'Euclide,* et étendu à tous les polyèdres, sans la restriction dont Robert Simson avait déjà reconnu le besoin. (*Voyez* aussi la *Géométrie* de LEGENDRE, 9e édition.)

faces de l'autre, sont en outre semblables à celles-ci, et assemblées par des côtés homologues.

Démonstration. — 1°. Si les triangles SAB, SAC, SBC (*fig.* 126) sont respectivement semblables aux triangles S′DE, S′DF, S′EF, et disposés de la même manière, que l'on prenne sur l'arête S′D, homologue dans le tétraèdre S′DEF à l'arête SA du tétraèdre SABC, la partie S′A′ = SA, et que, par le point A′, on mène le plan A′B′C′ parallèle à DEF, on déterminera, dans le tétraèdre S′DEF, un tétraèdre S′A′B′C′ semblable à S′DEF et égal à SABC.

En effet, il est évident qu'en vertu du parallélisme des droites A′B′ et DE, A′C′ et DF, B′C′ et EF (205), les faces S′A′B′ et S′DE, S′A′C′ et S′DF, S′B′C′ et S′EF, situées deux à deux dans le même plan, seront semblables. De plus, les triangles A′B′C′ et DEF, situés dans des plans différents, ayant aussi leurs côtés parallèles, et, par conséquent, leurs angles égaux (205), seront semblables. Les deux tétraèdres S′A′B′C′ et S′DEF ayant donc leurs faces semblables et leurs angles trièdres homologues formés par des angles plans égaux, auront chacun à chacun tous leurs angles dièdres égaux (223), et seront nécessairement semblables.

Maintenant, les triangles S′A′B′ et S′A′C′, équiangles à S′DE et à S′DF par construction, et, par conséquent, à SAB et à SAC, d'après l'hypothèse, seront égaux à ces derniers, puisque les deux côtés homologues S′A′ et SA sont égaux (18) : on aura donc ainsi S′B′ = SB, S′C′ = SC, ce qui entraînera l'égalité des triangles équiangles S′B′C′ et SBC, et, par suite, celle des tétraèdres S′A′B′C′ et SABC (228). Donc, enfin, les tétraèdres SABC et S′DEF, l'un égal, l'autre semblable à S′A′B′C′, sont semblables entre eux.

2°. Si les triangles SAB et SAC sont semblables aux triangles S′DE et S′DF, de plus, joints par des côtés homologues à ceux qui réunissent ces derniers, et que l'angle dièdre CSAB soit égal à l'angle dièdre FS′DE, le tétraèdre S′A′B′C′ construit ci-dessus sera égal à SABC (228), comme ayant deux faces, S′A′B′ et S′A′C′, égales aux faces SAB et SAC, et formant entre elles le même angle dièdre que ces dernières : le tétraèdre SABC sera donc encore semblable à S′DEF.

THÉORÈME.

231. *Deux pyramides quelconques sont semblables lorsque toutes leurs faces sont semblables et semblablement disposées.*

Démonstration. — Soient SABCDE, S′FGHIK (*fig.* 127) les deux pyramides proposées; il est visible que tous leurs angles dièdres font partie des angles trièdres adjacents aux bases ABCDE, FGHIK. Mais ceux-ci, lorsqu'ils sont homologues, comme B et G, C et H, etc., étant compris entre des faces semblables et semblablement disposées, sont formés d'angles plans égaux; ils ont par conséquent leurs angles dièdres égaux : les pyramides réunissent donc tous les caractères de la similitude (229).

232. 1^er *corollaire.* — Si l'on coupe la pyramide S′FGHIK par un plan A′B′C′D′E′ parallèle à FGHIK, on aura une pyramide S′A′B′C′D′E′ semblable à la pyramide entière; car il est facile de reconnaître que toutes les faces de l'une seront semblables à celles de l'autre, et semblablement disposées, puisque les triangles A′B′C′, A′C′D′, A′D′E′ sont respectivement semblables aux triangles FGH, FHI, FIK, d'où il résulte que les bases A′B′C′D′E′ et FGHIK sont semblables entre elles.

Il est visible que les pyramides S′A′B′C′D′E′ et SABCDE seront égales, si l'une des arêtes S′A′ de la première est égale à sa correspondante SA dans la seconde;

car les faces de l'une et de l'autre étant semblables à celles de la pyramide S'FGHIK, sont semblables entre elles, et doivent par conséquent devenir égales lorsqu'elles ont un côté commun, puisqu'en vertu du n° 18, des triangles équiangles sont égaux quand ils ont chacun à chacun un côté égal; de plus, les angles trièdres de chacune de ces pyramides, étant formés d'angles plans égaux, auront leurs angles dièdres égaux (223). Par conséquent, lorsque les bases A'B'C'D'E' et ABCDE coïncideront, les pyramides S'A'B'C'D'E' et SABCDE coïncideront aussi.

En menant des plans par les sommets S et S' et par les diagonales AC, AD, FH et FI, on prouverait encore, avec un peu d'attention, que les pyramides SABCDE, S'A'B'C'D'E' et S'FGHIK sont composées d'un même nombre de tétraèdres semblables et semblablement disposés, et que les pyramides S'A'B'C'D'E' et SABCDE le sont de tétraèdres égaux, d'où l'on pourrait aussi conclure que ces dernières sont égales.

Il convient d'observer que l'égalité de ces pyramides emporte celle des perpendiculaires SP et S'P', abaissées des sommets S et S' sur les bases respectives.

233. 2ᵉ *corollaire*. — Il suit de la similitude des faces des pyramides SABCDE, S'FGHIK, que les arêtes de ces pyramides sont proportionnelles entre elles et aux perpendiculaires SP et S'Q abaissées des sommets sur les bases; car, en comparant les faces triangulaires homologues SAB et S'FG, SBC et S'GH, etc., on aura ces suites de rapports égaux :

$$SA : S'F :: AB : FG :: SB : S'G,$$
$$SB : S'G :: BC : GH :: SC : S'H,$$

desquelles on tirera celle-ci :

$$SA : S'F :: SB : S'G :: SC : S'H :: \ldots$$
$$:: AB : FG :: BC : GH :: \ldots.$$

De plus, le parallélisme des plans A′B′C′D′E′ et FGHIK donne (220)

$$S'A' : S'F :: S'P' : S'Q,$$

ou

$$SA : S'F :: SP : S'Q,$$

puisque $S'A' = SA$, $S'P' = SP$, et le rapport $SA : S'F$ lie cette dernière proportion aux précédentes.

234. *Remarque.* — On peut, par le moyen de ce qui précède, trouver la hauteur d'une pyramide quand on connaît les dimensions d'un *tronc* tel que FGHIKA′B′C′D′E′, qui reste lorsqu'on en a retranché la partie supérieure S′A′B′C′D′E′, au moyen d'un plan A′B′C′D′E′ parallèle à la base FGHIK. Pour cela, il suffit de considérer la proportion

$$A'B' : FG :: S'P' : S'Q,$$

de laquelle on conclut

$$FG - A'B' : FG :: S'Q - S'P' : S'Q,$$

ou

$$FG - A'B' : FG :: P'Q : S'Q.$$

Les trois premiers termes de la dernière proportion sont donnés par le tronc même, dont P′Q est la hauteur, et font connaître la hauteur S′Q de la pyramide entière.

THÉORÈME.

235. *Les bases des pyramides semblables* S′A′B′C′D′E′ *et* S′FGHIK *sont entre elles comme les carrés de deux arêtes homologues quelconques* S′A′, S′F, *et comme les carrés des perpendiculaires* S′P′ *et* S′Q, *abaissées du sommet sur leur plan.*

Démonstration. — Les bases étant semblables, on a d'abord (176)

$$A'B'C'D'E' : FGHIK :: \overline{A'B'}^2 : \overline{FG}^2;$$

mais, par le n° 233,

$$A'B' : FG :: S'A' : S'F :: S'P' : S'Q,$$

et, par conséquent,

$$\overline{A'B'}^2 : \overline{FG}^2 :: \overline{S'A'}^2 : \overline{S'F'}^2 :: \overline{S'P'}^2 : \overline{S'Q'}^2;$$

d'où il résulte

$$A'B'C'D'E' : FGHIK :: \overline{S'A'}^2 : \overline{S'F}^2 :: \overline{S'P'}^2 : \overline{S'Q}^2,$$

ce qui contient les deux parties de la proposition.

Il est visible que, dans les proportions obtenues précédemment, on peut substituer, au lieu de la pyramide S'A'B'C'D'E' et des lignes qui lui appartiennent, la pyramide égale SABCDE et les lignes correspondantes.

236. *Corollaire.* — Il suit de là que les sections faites à la même distance des sommets, dans deux pyramides quelconques, sont dans un rapport constant, quelles que soient d'ailleurs ces distances et les figures des bases. En effet, si dans le tétraèdre de la *fig.* 26 les distances S'Q et S'P' sont égales aux distances S'Q et S'P', dans la pyramide de la *fig.* 127, le rapport des carrés des deux premières étant égal à celui des carrés des deux dernières, le rapport des triangles DEF et A'B'C' sera, par conséquent, égal à celui des pentagones FGHIK et A'B'C'D'E'; en sorte qu'on aura

$$DEF : A'B'C' :: FGHIK : A'B'C'D'E',$$

ou

$$DEF : FGHIK :: A'B'C' : A'B'C'D'E'.$$

237. On distingue encore parmi les polyèdres, sous le nom de *prismes,* ceux qui ont deux faces opposées, égales et parallèles, qu'on nomme *bases,* et dont toutes les autres sont des parallélogrammes. Le corps ABCDEFGHIK (*fig.* 128) est un prisme; sa base est le pentagone ABCDE, et voici sa construction. Par le sommet des angles de cette base et hors de son plan,

on a mené des droites AF, BG, etc., parallèles entre elles, et terminées à un plan FGHIK parallèle au plan ABCDE : les arêtes AF, BG, CH, etc., prises deux à deux, déterminent les faces AFGB, BGHC, etc., qui sont des parallélogrammes, puisque les droites AB et FG, BC et GH sont parallèles deux à deux (215).

Il est visible que le polygone FGHIK formant la *base supérieure* du prisme est égal au polygone ABCDE formant la base inférieure; car ils ont leurs côtés et leurs angles égaux chacun à chacun (205). Par la même raison, la section faite dans le prisme proposé, par tout plan parallèle à sa base, sera aussi égale à cette base.

On doit remarquer que chaque angle polyèdre d'un prisme n'est composé que de trois angles plans.

Un prisme dont les arêtes sont perpendiculaires sur sa base est *droit;* les autres sont *obliques*.

238. Le prisme ABCDEFGH (*fig.* 129), qu'on désignerait aussi par AG, et dont la base ABCD est un parallélogramme, se nomme *parallélépipède :* ses faces opposées, ABFE, DCGH par exemple, sont égales et parallèles. Leur égalité est évidente d'après la construction du prisme (237), et leur parallélisme résulte de celui des côtés des angles EAB, HDC égaux entre eux (217).

THÉORÈME.

239. *Un polyèdre compris entre six plans parallèles deux à deux est un parallélépipède.*

Démonstration. — 1°. Le plan ABFE coupant les deux plans parallèles ABCD et EFGH suivant les droites AB et EF parallèles entre elles (215), et les plans parallèles ADHE et BCGF suivant les droites AE et BF parallèles entre elles, la figure ABFE est nécessairement un parallélogramme. On montrerait de la même manière que chacune des autres faces du polyèdre AG est un parallélogramme. 2° Les côtés AB et DC, étant opposés dans le parallélogramme ABCD, sont égaux; les côtés HD et AE, CG et BF le sont aussi comme opposés dans les parallélogrammes ADHE, BCGF; enfin, les angles CDH et BAE, DCG et ABF sont égaux comme ayant leurs côtés parallèles et leur ouverture tournée dans le même sens (205) : les parallélogrammes opposés, ABFE et CDHG, ayant ainsi chacun à chacun trois côtés et deux angles égaux, seront donc égaux (85).

THÉORÈME.

240. *Si les angles trièdres* B *et* B′ *des prismes* AI *et* A′I′ (fig. 128) *sont composés de polygones égaux et semblablement disposés, ces prismes seront égaux.*

Démonstration. — Il est visible que lorsque la coïncidence des angles trièdres B et B′ sera établie (224), les faces ABCDE et A′B′C′D′E′, BCHG et B′C′H′G′ se trouvant confondues, les droites CD et C′D′, CH et C′H′, coïncideront nécessairement, à cause de l'égalité de ces faces. Mais les lignes CD et CH déterminant la face CDIH, et les lignes C′D′ et C′H′ la face correspondante C′D′I′H′, il s'ensuit que ces faces coïncideront aussi. On prouverait de même que tous les autres parallélogrammes du prisme AI doivent se confondre avec ceux du prisme A′I′; d'où il résulte que les polygones FGHIK et F′G′H′I′K′ coïncideront aussi, puisque les côtés du premier se trouveront confondus avec ceux du second (1).

241. *Remarque.* — Je passe maintenant aux polyèdres de figure quelconque. On peut toujours, en joignant par des droites le sommet d'un de leurs angles à tous les autres, et divisant toutes leurs faces en triangles, les

---

(1) Il serait aisé de prouver que l'égalité des prismes se changerait en similitude, si les polygones assemblés au même angle trièdre étaient seulement semblables et semblablement disposés.

partager en pyramides triangulaires qui ont pour faces des plans menés de ce point aux arêtes et aux diagonales des faces du corps proposé. L'inspection de la *fig.* 130 rend la chose évidente. Le polyèdre ABCDEFG se trouve partagé dans les cinq pyramides

GABC, GABF, GAEF, GAEC, GEDC,

dont le sommet est au point G, et qui se forment en joignant d'abord ce point avec les sommets A, B, C, D, E des autres angles polyèdres, ce qui donne les pyramides GABCDE, GABF, GAEF, ayant pour bases les diverses faces qui ne font point partie de l'angle polyèdre G; et partageant ensuite en triangles celles de ces faces qui ont plus de trois côtés, on a les bases des pyramides triangulaires désignées précédemment.

Je ne m'arrêterai pas à prouver que deux corps composés d'un même nombre de pyramides triangulaires égales et semblablement disposées sont égaux ; mais je ferai remarquer, par analogie avec ce qui a été dit sur les polygones, dans le n° 91, qu'un polyèdre quelconque est déterminé en donnant les sommets de trois de ses angles polyèdres, et leurs distances à tous les autres (227). Il suit de là que N désignant le nombre des angles du polyèdre, sa détermination absolue dépend des $3(N-3)$ lignes menées aux angles du triangle pris pour base, et des trois côtés de ce triangle, ce qui fait en tout $3N-6$ données (1).

(1) Le nombre des angles d'un polyèdre, celui de ses faces et celui de ses arêtes, remplissent une condition remarquable découverte par Euler, et que voici : S désignant le nombre des angles polyèdres, H celui des faces, A celui des arêtes, on a toujours $S+H=A+2$. Pour le cube par exemple, $S=8$, $H=6$, $A=12$. (*Voyez* le 16[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique,* dans lequel M. Cauchy a donné des théorèmes nouveaux et curieux à ce sujet, et les *Annales de Mathématiques,* par M. Gergonne, tome XIX, p. 333.)

THÉORÈME.

242. *Deux polyèdres qui sont composés d'un même nombre de pyramides semblables et semblablement disposées, sont semblables.*

Démonstration.—Soient les deux polyèdres ABCDEFG, *abcdefg* (*fig.* 130), composés d'un même nombre de pyramides semblables,

GABCDE et *gabcde*,
GAEF et *gaef*,
GABF et *gabf* (1),

dont les sommets sont aux points G, *g*, et semblablement disposées; il faut prouver que toutes les faces de l'un des corps sont semblables à celles de l'autre, semblablement disposées, et forment des angles dièdres égaux (229).

En jetant les yeux sur la figure, on voit d'abord que toutes les faces des deux polyèdres sont ou des faces semblables de pyramides homologues, ou composées d'un même nombre de ces faces, semblablement disposées entre elles.

Les faces telles que ABCDE et *abcde* sont dans le premier cas, puisqu'elles appartiennent aux pyramides GABCDE et *gabcde*, situées de la même manière dans l'un et dans l'autre polyèdre.

Il en est de même des faces ABF, *abf*, communes aux polyèdres et aux tétraèdres GABF et *gabf*.

La similitude des faces DEFG et *defg* se rapporte au second cas, parce qu'elles sont respectivement formées des triangles DEG et EFG, *deg* et *efg*, appartenant aux pyramides GABCDE et GAEF, *gabcde* et *gaef*, dont

(1) Pour aider le lecteur à concevoir les pyramides comprises dans chacun des polyèdres, j'ai placé la première la lettre qui désigne le sommet; les autres font connaître la base.

les deux premières sont semblables aux deux dernières. Il en sera de même des faces BFGC et *bfgc*, composées des triangles BCG et BFG, *bcg* et *bfg*, appartenant aux pyramides GABCDE et GABF, *gabcde* et *gabf*.

Un semblable raisonnement prouverait la similitude de toutes les faces des polyèdres, en quelque nombre qu'elles fussent.

On s'y prendra de même pour reconnaître l'égalité des angles dièdres que ces faces comprennent. Les uns sont égaux parce qu'ils sont communs aux polyèdres et à deux pyramides semblables : tels sont les angles GDEA et *gdea*, faisant partie des polyèdres et des pyramides GABCDE et *gabcde*; tels sont encore les angles GEFA et *gefa*, appartenant aux tétraèdres GAEF et *gaef*.

Les autres angles sont égaux parce qu'ils sont formés de la réunion d'un même nombre d'angles égaux comme appartenant à des pyramides semblables : tels sont les angles BFAE et *bfae*, composés respectivement des angles BFAG et GFAE, *bfag* et *gfae*, appartenant aux pyramides GABF et GAEF, *gabf* et *gaef*. Le même raisonnement aurait lieu, quel que fût le nombre d'angles des polyèdres. Il pourrait arriver que ces angles fussent composés de plus de deux angles des pyramides, mais la démonstration ne changerait pas dans ce cas : on remarquera d'ailleurs son analogie avec celle du n° 88, qui se rapporte aux polygones.

THÉORÈME.

243. *Lorsque deux polyèdres sont semblables, ils peuvent être partagés en un même nombre de tétraèdres semblables et semblablement disposés.*

Démonstration. — Il est d'abord évident que si, dans les faces semblables des polyèdres proposés, on joint les angles homologues par des diagonales, on formera sur ces faces un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés. Choisissant ensuite sur les deux corps deux faces semblables, et prenant dans chacune un angle homologue pour le joindre à tous les autres angles du corps dont il fait partie, les polyèdres proposés seront partagés en un même nombre de tétraèdres semblablement disposés, et dont toutes les bases seront semblables.

Ces tétraèdres pourront se diviser en deux classes. Les uns auront deux faces communes avec les polyèdres, et comprenant entre elles des angles dièdres égaux comme appartenant aux polyèdres : ils seront donc semblables. Dans cette classe sont les tétraèdres GCDE et *gcde*, dont les faces GDC et GDE, *gdc* et *gde* sont semblables comme triangles homologues des faces semblables DEFG et *defg* des polyèdres, et comprenant les angles dièdres CGDE, *cgde* qui appartiennent aux polyèdres.

Les tétraèdres de la seconde classe sont composés de faces homologues des tétraèdres de la première, et comprenant des angles formés par la différence d'angles égaux de ces tétraèdres, et d'angles égaux des polyèdres. De ce nombre sont les tétraèdres GAEC, *gaec*. En effet, la comparaison des tétraèdres GCDE et *gcde*, dont la similitude a déjà été démontrée, prouve que les triangles GEC et *gec* sont semblables, et que les angles dièdres DCGE et *dcge* sont égaux; la comparaison des tétraèdres GABC et *gabc*, qui ont aussi deux faces communes avec les polyèdres, savoir, BCG et ABC pour le premier, *bcg* et *abc* pour le second, prouve la similitude des triangles ACG et *acg*, ainsi que l'égalité des angles dièdres BCGA et *bcga*. Maintenant, si, des angles dièdres BCGD et *bcgd*, égaux puisqu'ils sont formés par des faces homologues des polyèdres, on retranche respectivement les angles DCGE et *dcge*, BCGA et *bcga*, dont on a déjà montré l'égalité, les angles dièdres restants, ACGE et *acge*, seront égaux; par conséquent, les tétraèdres GAEC et *gaec* seront semblables. De pareilles considérations rendraient évidente la similitude de tous les tétraèdres qui n'ont pas deux faces communes avec les polyèdres.

Il est bon de remarquer la similitude des triangles ACG et *acg*, formés par les diagonales des polyèdres, parce qu'il en résulte que les sommets des angles polyèdres, A, G, C, *a*, *g*, *c*, homologues dans des faces semblables, sont semblablement placés, les uns par rapport aux autres, dans tous les plans qui les joignent, et qui sont eux-mêmes semblablement placés et également inclinés par rapport aux faces qu'ils rencontrent. On en conclut que les sommets de ces angles sont semblablement placés dans les deux corps, ainsi que par rapport aux faces homologues, et sont, par conséquent, homologues dans les corps. Cette démonstration est entièrement analogue à celle du n° 89, relative aux polygones.

THÉORÈME.

244. *Les arêtes homologues des polyèdres semblables sont proportionnelles, ainsi que les diagonales des faces homologues et les diagonales intérieures aux polyèdres.*

Démonstration. — En effet, si l'on compare successivement les faces homologues BCGF et *bcgf*, et les triangles AGC et *agc*, on aura ces deux suites de rapports égaux :

$$BC : bc :: BF : bf :: FG : fg :: BG : bg :: GC : gc,$$
$$GC : gc :: AC : ac :: AG : ag,$$

qui se lient entre elles par le rapport commun GC : *gc*, et que l'on combinerait de même avec les suites de rapports égaux déduits de la comparaison des autres faces homologues.

245. *Remarque.* — Je n'entrerai dans aucun détail sur la mesure de l'aire des surfaces qui terminent les

polyèdres, puisqu'elles se composent de figures planes, que l'on évaluera par les propositions de la IIe section de la Ire partie. J'observerai seulement que la somme des aires des parallélogrammes qui enveloppent un prisme, sans y comprendre les deux bases, est égale au produit de l'une des arêtes AF, BG, CH, etc., de ce prisme (*fig.* 128), par le contour de la section LMNOP, faite par un plan qui leur est perpendiculaire. En effet, il suit du n° 196, que les côtés LM, MN, NO, etc., de cette section, sont les hauteurs des parallélogrammes ABGF, BCHG, CDIH, etc., en prenant pour bases les arêtes AF, BG, CH, etc. : on aura donc

$$\text{ABGF} = \overline{\text{AF}} \times \overline{\text{LM}}, \quad \text{BCHG} = \overline{\text{BG}} \times \overline{\text{MN}}, \text{ etc.};$$

et comme les arêtes AF, BG, etc., sont égales entre elles, la somme des aires des parallélogrammes qui enveloppent le prisme sera égale à l'une d'elles, multipliée par LM + MN + ...

THÉORÈME.

246. *Les aires des polyèdres semblables sont entre elles comme les carrés des arêtes homologues.*

Démonstration. — Chacune des faces du premier polyèdre est à sa correspondante, dans le second, comme le carré de l'un de ses côtés est au carré du côté homologue de l'autre (176); mais ces côtés, étant des arêtes homologues des polyèdres, sont, d'un polyèdre à l'autre, dans le même rapport (244) : leurs carrés formeront donc une suite de rapports égaux; et ces rapports étant aussi ceux des faces homologues, il en faut conclure que ces derniers sont égaux entre eux. Par conséquent, la somme des faces du premier polyèdre est à la somme des faces du second comme une quelconque des faces de l'un est à la correspondante de l'autre, ou comme le carré d'une arête du premier polyèdre est au carré de l'arête homologue du second. Substituant dans cette proportion, à la place des sommes des faces, les aires totales des polyèdres qu'elles forment, il en résultera que ces aires seront entre elles dans le rapport des carrés des arêtes homologues.

De la mesure des volumes.

247. L'espace renfermé par la surface d'un polyèdre, ou occupé par ce corps, est généralement désigné sous le nom de *volume* (1). Quand on considère un vase ou un corps creux, on désigne encore le volume par le mot *capacité*. Parmi des corps de formes très-différentes, il s'en trouve d'équivalents en volume ou en capacité, comme il y a des figures planes de formes différentes et d'aires équivalentes (159).

THÉORÈME.

248. *Deux parallélépipèdes construits sur la même base, et terminés supérieurement par le même plan parallèle à leur base, sont équivalents en volume.*

Démonstration. — Il y a deux cas à considérer. Dans l'un, que représentent les deux *fig.* 131, et dont je m'occuperai d'abord, les parallélépipèdes proposés, AG et AL, sont renfermés latéralement entre les mêmes plans parallèles AK et DL. Par cet état de choses, il est visible que les prismes triangulaires AEIDHM et BFKCGL sont

(1) Ce mot, compris par tous ceux qui entendent la langue française, m'a paru préférable au mot *solidité*, qui, dans l'usage ordinaire, est employé dans une autre acception. Ce n'est que lorsque la langue n'offre pas de mots propres à rendre une idée, qu'il peut être permis d'en créer de nouveaux, ou de détourner de sa signification quelque mot connu. La multitude des termes techniques étant un des plus grands obstacles qui s'opposent à la propagation des sciences, on ne saurait trop en diminuer le nombre. Puisque tout le monde comprend ce que c'est que le volume d'un corps, pourquoi le désigner par le mot *solidité*, qui rappelle plutôt l'idée de la résistance aux diverses causes de destruction?

égaux (240); car les triangles AEI et BFK, qui leur servent de bases, sont égaux (16), à cause des parallèles AE et BF, AI et BK, et les parallélogrammes AEHD et BFGC, AIMD et BKLC sont aussi égaux (238). Si donc on retranche du polyèdre AL, d'une part le prisme BFKCGL, et de l'autre le prisme AEIDHM, les parallélépipèdes restants ABCDEFGH et ABCDIKLM, ou AG et AL, seront équivalents.

Le second cas se trouve représenté dans la *fig.* 132, où les deux parallélépipèdes ABCDIKLM et ABCDNOPQ n'ont de commun que leur base inférieure ABCD et le plan qui contient leurs bases supérieures IKLM et NOPQ. On ramène ce cas au précédent en prolongeant les plans ABIK et DCLM, en même temps que les plans ADQN et BCPO, pour former le parallélépipède ABCDEFGH (239), qui se trouve premièrement équivalent au parallélépipède ABCDIKLM, comme étant renfermé latéralement entre les plans parallèles AK et DL. Le même parallélépipède ABCDEFGH, considéré comme compris entre les plans parallèles BP et AQ, est aussi équivalent au parallélépipède ABCDNOPQ : les parallélépipèdes ABCDIKLM et ABCDNOPQ, ou AL et AP, sont donc équivalents entre eux.

249. *Corollaire.* — Par le moyen du théorème précédent, on prouve que tout parallélépipède AL dont les arêtes AI, BK, CL, DM sont inclinées sur sa base est équivalent à un autre, AP, construit sur la même base, mais dont les arêtes AN, BO, CP, DQ sont perpendiculaires sur cette base.

On peut ensuite transformer ce dernier (*fig.* 133) en un autre, ABRSNOTU ou AT, ayant pour base le rectangle ABRS équivalent au parallélogramme ABCD, et dont les arêtes soient encore perpendiculaires sur sa base; car si l'on considère les parallélépipèdes AP et AT comme ayant pour base commune le parallélogramme ABON, ils rentreront dans le premier cas du numéro précédent.

Il est évident que toutes les faces du parallélépipède AT sont des rectangles : on le nomme, à cause de cela, *parallélépipède rectangle,* et l'on conclut, de ce qui vient d'être dit, qu'*un parallélépipède quelconque peut être transformé en un parallélépipède rectangle, ayant une base équivalente à celle du premier, et même hauteur.*

La *hauteur* d'un prisme ou d'un parallélépipède est la perpendiculaire menée entre les deux bases.

N. B. — Il faut observer ci-dessus que les bases ABCD et ABRS ont nécessairement un côté commun.

THÉORÈME.

250. *Si l'on forme sur la base d'un prisme triangulaire un parallélogramme, et que l'on élève sur ce parallélogramme, pris pour base, un parallélépipède de même hauteur que le prisme triangulaire, celui-ci sera la moitié de l'autre.*

Démonstration.—Soit le prisme triangulaire ABCEFG, (*fig.* 129); si l'on achève sur sa base le parallélogramme ABCD, qu'on élève par le point D la droite DH parallèle aux droites AE, BF, CG, et terminée au plan de la base supérieure EFG du prisme proposé, les plans AEHD et DHGC, respectivement parallèles aux plans BFGC et AEFB (217), compléteront le parallélépipède, et formeront, avec le plan AEGC, un second prisme triangulaire ADCEHG, dont les parties constituantes seront les mêmes que celles du prisme ABCEFG. En effet, les bases triangulaires sont les mêmes, la face ACGE est commune, et les autres faces parallélogrammes sont égales, comme opposées dans le parallélépipède. On ne peut cependant pas conclure du n° 240 l'égalité de ces prismes, parce que leurs faces ne sont pas semblablement disposées. Il n'y a que les angles trièdres tels que H et B, diagonalement opposés dans le parallélépipède, qui soient entièrement formés d'angles plans égaux. En comparant la position de ceux-ci (223), on reconnaît que les angles dièdres AEHG et GCBA, DHGE et FBAC, AEGH et EACB, sont égaux. On voit par là que le prisme triangulaire ADCEHG est construit au-dessous du plan EHG, avec les mêmes parties qui constituent le prisme ABCEFD, au-dessus de ABC, et que, par conséquent, ces deux polyèdres, compris dans la classe de ceux qui ne peuvent coïncider (225), doivent renfermer le même espace : le volume de chacun d'eux sera donc la moitié de celui du parallélépipède qu'ils composent (1).

251. *Corollaire.* — Il suit de là que deux prismes triangulaires de même base et de même hauteur sont équivalents comme moitiés de parallélépipèdes équivalents.

---

(1) Si l'on ne regarde pas cette égalité comme évidente, on la prouvera ainsi qu'il suit. Par les extrémités A, E d'une arête du parallélépipède BH (*fig.* 134), on mènera des plans perpendiculaires à cette arête, et l'on formera ainsi le parallélépipède NE, dont les arêtes sont perpendiculaires sur la base AMNO, et, de plus, équivalent au parallélépipède BH, puisqu'ils ont même hauteur, que leurs bases AOLE et ADHE sont équivalentes, et qu'elles ont un côté commun (249). Mais le plan DBHF partage le parallélépipède NE en deux prismes triangulaires droits AOMELI, MNOIKL évidemment égaux; car leurs faces sont égales, semblablement disposées, et leurs angles dièdres correspondants sont égaux; chacun de ces prismes est donc la moitié du parallélépipède NE, et, par conséquent, celle du parallélépipède BH. Cela posé, il est facile de voir que les pyramides quadrangulaires AMBDO et EIFHL sont égales comme ayant chacune à chacune toutes leurs faces égales, semblablement disposées et leurs angles dièdres correspondants égaux, et que si on les retranche alternativement du corps AMOEFH, les restes seront les deux prismes triangulaires AOMELI, ABDEFH. Ces deux prismes sont donc équivalents; or le premier étant la moitié du parallélépipède BH, il en sera de même du second.

Cette démonstration m'a été communiquée en 1803 par M. Fournier jeune; mais M. Ampère, alors professeur à l'École centrale de Lyon, en avait déjà trouvé, de son côté, le principe.

THÉORÈME.

252. *Si l'on coupe un tétraèdre par des plans parallèles à sa base et équidistants, on pourra former à chaque tranche un prisme extérieur et un prisme intérieur, de manière que la somme des premiers approche autant qu'on voudra de celle des seconds, et, par conséquent, aussi du tétraèdre.*

Démonstration. — Soient ABC (*fig.* 135) la base du tétraèdre proposé, et FGH, LMN, QRT les plans coupants; on mènera par les points A et B, F et G, L et M, Q et R, les droites AD et BE, Ia et Kb, Of et Pg, Ul et Vm, parallèles à l'arête CS, et terminées aux plans coupants supérieurs. A la première tranche ABCFGH, le prisme extérieur sera ABCDEH, et le prisme intérieur abCFGH. Pour abréger, je désignerai l'un par AH et l'autre par aH. A la seconde tranche FGHLMN, le prisme extérieur sera FN et l'intérieur fN, et ainsi de suite jusqu'à la dernière tranche SQRT, qui n'aura point de prisme intérieur, mais un prisme extérieur QS.

Tous ces prismes ont pour hauteur commune l'épaisseur des tranches; et le prisme intérieur de chaque tranche, étant compris entre les mêmes parallèles que le prisme extérieur de la tranche au-dessus, est égal à ce dernier (240); en sorte que

$$a\text{H} = \text{FN}, \quad f\text{N} = \text{LT}, \quad l\text{T} = \text{QS},$$

et, par conséquent,

$$a\text{H} + f\text{N} + l\text{T} = \text{FN} + \text{LT} + \text{QS},$$

somme qui comprend tous les prismes extérieurs, excepté le premier, AH : celui-ci est donc l'excès de la somme des prismes extérieurs sur celle des prismes intérieurs.

Je n'ai considéré que quatre tranches, mais on en peut faire autant qu'on voudra; et plus le nombre en sera grand, plus leur épaisseur ou celle du prisme AH diminuera. Il pourra, par conséquent, être rendu moindre qu'un prisme donné, quelque petit que soit celui-ci : il en sera donc ainsi de la différence entre la somme des prismes extérieurs et celle des prismes intérieurs. Mais le tétraèdre SABC étant plus petit que la première somme et plus grand que la seconde, sa différence avec l'une quelconque des deux sera encore moindre que leur différence propre : on pourra donc faire en sorte que l'une et l'autre somme approchent autant que l'on voudra du volume de ce tétraèdre.

THÉORÈME.

253. *Deux tétraèdres de même base et de même hauteur sont équivalents.*

Démonstration. — Si l'on conçoit que sur chaque tétraèdre SABC, S'A'B'C', on ait construit une suite de prismes extérieurs correspondants, ces prismes, compris entre des plans parallèles, ont nécessairement même hauteur; les sections qui leur servent de base, étant respectivement à même distance du sommet, ainsi que les triangles égaux ABC, A'B'C', bases des tétraèdres, sont égales chacune à chacune (236) : les prismes extérieurs correspondants sont donc équivalents; par conséquent, la somme des prismes extérieurs d'un tétraèdre est égale à celle des prismes extérieurs de l'autre. Si donc f et f' désignent ces deux sommes, on aura

$$f = f' \quad \text{ou} \quad \frac{f}{f'} = 1;$$

mais comme on peut rendre aussi petite qu'on le voudra la différence entre chacune de ces sommes et le tétraèdre auquel elle appartient, on parviendrait à prouver que la différence entre les rapports $\frac{f}{f'}$ et $\frac{\text{SABC}}{\text{S'A'B'C'}}$ est moindre qu'aucune grandeur donnée; et, par là, celle du rapport invariable $\frac{SABC}{S'A'B'C'}$ et de l'unité l'étant aussi, il en résulte que $\frac{SABC}{S'A'B'C'} = 1$ (153), ou que $SABC = S'A'B'C'$ (1).

THÉORÈME.

254. *Un tétraèdre est équivalent au tiers du prisme triangulaire de même base et de même hauteur.*

Démonstration. — Si, par les points A et C de la base ABC du tétraèdre EABC (*fig.* 136), on mène les droites AD, CF parallèles à l'arête BE, et par le point E un plan parallèle à ABC, on formera un prisme triangulaire ABCDEF (237). Si maintenant on fait passer par les sommets A, E, C des angles trièdres de ce prisme un plan, il en séparera d'abord le tétraèdre proposé EABC, dont la hauteur et la base seront les mêmes que celles du prisme; il restera ensuite une pyramide quadrangulaire EACFD, représentée à part en $E'A'C'F'D'$, dont le sommet sera en E, et qui aura pour base la face postérieure ACFD du prisme. Si, par les points D, E, C, on fait passer un nouveau plan, il partagera cette pyramide en deux tétraèdres EACD, ECFD, représentés à part en $E''A''C''D''$, $E'''C'''F'''D'''$; leurs hauteurs seront égales puisqu'ils ont leur sommet au même point E et leurs bases sur un même plan. Ces bases seront aussi égales comme étant les moitiés du parallélogramme ACFD. Les tétraèdres EACD, ECFD seront donc équivalents (numéro précédent); mais le second pouvant être considéré comme ayant pour base le triangle DEF, égal au

(1) On démontrerait immédiatement qu'il y aurait absurdité à supposer un des tétraèdres plus grand que l'autre : il suffirait pour cela de considérer des prismes extérieurs tels, que la différence entre ceux qui seraient formés sur le tétraèdre supposé le plus petit et ce tétraèdre fût moindre que la différence des deux tétraèdres; car il en résulterait que la somme des prismes extérieurs correspondants, formés sur le tétraèdre qu'on regarde comme le plus grand, serait moindre que ce tétraèdre.

triangle ABC, et son sommet au point C, il aura même base et même hauteur que le prisme, et sera en conséquence équivalent au premier tétraèdre EABC. Donc les tétraèdres EABC, EACD, ECFD seront équivalents; donc chacun sera équivalent au tiers du prisme triangulaire qu'ils composent.

THÉORÈME.

255. *Les parallélépipèdes rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.*

Démonstration. — Soient les parallélépipèdes rectangles AG et IP (*fig.* 137), dont les bases AC et IL sont des rectangles égaux: 1°. Si les hauteurs AE et IN sont commensurables, qu'on les divise en parties A*a* et I*i* égales à leur commune mesure, et que, par les points *a* et *i*, on mène des plans parallèles à AC et IL, on formera les parallélépipèdes A*c* et I*l* égaux entre eux (240); mais le nombre de ces parallélépipèdes étant dans AG le même que celui des parties égales contenues dans AE, et dans IP le même que celui des parties égales contenues dans IN, on aura évidemment

$$AG : IP :: AE : IN,$$

conformément à l'énoncé.

2°. Lorsque les hauteurs AE et IN ne sont pas commensurables, le tour de démonstration employé dans le n° 166 prouve de même que le rapport du parallélépipède AG au parallélépipède IP ne peut être ni plus grand ni plus petit que celui de AE à IN. En effet, si l'on suppose la proportion

$$AG : IP :: AE : IR, \quad \text{et} \quad IR > IN,$$

on portera sur IN des parties aliquotes de AE plus petites que NR; et, par le point de division *n*, tombant entre N et R, on mènera un plan parallèle à IL pour former le parallélépipède Ip, à l'égard duquel on aura

$$AG : Ip :: AE : In.$$

De cette proportion et de la précédente, on tirera

$$IP : Ip :: IR : In,$$

résultat absurde, puisque $IP < Ip$ et $IR > In$.

On ne saurait faire non plus

$$AG : IP :: AE : IR' \quad \text{et} \quad IR' < In;$$

car, pour un point de division n', placé entre R' et N, on aurait

$$AG : Ip' :: AE : In',$$

d'où l'on conclurait

$$IP : Ip' :: IR' : In';$$

ce qui est encore absurde, puisque $IP > Ip'$ et $IR' < In'$.

THÉORÈME.

256. *Deux parallélépipèdes rectangles quelconques,* AG *et* IP (fig. 138), *sont entre eux comme les produits des arêtes qui forment un même angle trièdre.*

Démonstration. — Si l'on prend sur l'arête IN du parallélépipède IP une partie $II' = AE$, et sur l'arête BC du parallélépipède AG une partie $BC' = IM$; puis qu'on mène le plan I'L' parallèle à IL, et le plan C'H' parallèle à AF, on construira les parallélépipèdes IL' et AG' qui auront pour bases les rectangles IM' et AH', formés sur des bases et des hauteurs égales : on aura donc, par le numéro précédent,

$$AG' : IL' :: AB : IK;$$

et en comparant les parallélépipèdes AG et AG', considérés comme ayant pour base le rectangle AF, il viendra

$$AG : AG' :: AD : AD'.$$

Multipliant ces proportions par ordre, en omettant le facteur AG', commun aux deux termes du premier rapport composé, et substituant à AD' son égale IM, on conclura

$$\mathrm{AG} : \mathrm{IL'} :: \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{AD}} : \overline{\mathrm{IK}} \times \overline{\mathrm{IM}}.$$

Enfin, les parallélépipèdes IL' et IP, ayant même base IL, donneront la proportion

$$\mathrm{IL'} : \mathrm{IP} :: \mathrm{II'} : \mathrm{IN}.$$

Multipliant encore cette proportion et la précédente par ordre, en omettant le facteur IL', et remplaçant II' par son égale AE, il viendra

$$\mathrm{AG} : \mathrm{IP} :: \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{AD}} \times \overline{\mathrm{AE}} : \overline{\mathrm{IK}} \times \overline{\mathrm{IM}} \times \overline{\mathrm{IN}},$$

ce qui donne l'énoncé du théorème.

257. *Remarque.* — Si l'on choisit pour terme de comparaison, de tous les parallélépipèdes rectangles, le parallélépipède rectangle *ag* (*fig.* 139) dont les trois arêtes contiguës *ab*, *ad*, *ae* soient égales à la ligne prise pour unité ou pour mesure commune des droites, leur produit sera l'unité, et l'on aura

$$ag : \mathrm{AG} :: 1 : \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{AD}} \times \overline{\mathrm{AE}};$$

c'est-à-dire *que le parallélépipède rectangle* AG *contiendra autant de fois le parallélépipède rectangle ag, que le produit des lignes* AB, AD, AE, *rapportées à la mesure commune ab, contient l'unité.* C'est là ce qu'il faut entendre quand on dit que *la mesure du volume d'un parallélépipède rectangle est le produit de ses trois arêtes contiguës;* et si l'on observe que le produit $\overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{AD}}$ exprime le nombre des carrés égaux à *ac*, contenus dans la base AC (168), ou, ce qui est la même chose, donne la mesure de l'aire de cette base, on en conclura que le *volume d'un parallélépipède rectangle a pour* *mesure le produit de sa base par sa hauteur,* évaluées l'une et l'autre numériquement.

Dans le cas où les arêtes AB, AD et AE contiendraient un nombre exact de fois le côté *ab* du parallélépipède *ag*, on reconnaîtrait, à l'inspection de la figure, que l'on pourrait placer sur la base AC autant de parallélépipèdes égaux à *ag*, que cette base contient de fois la base *ac*, et qu'on formerait ainsi un parallélépipède de même base que AG, de même hauteur que *ag*, et qui serait contenu dans AG autant de fois que la hauteur AE contient la hauteur *ae* ou le côté *ab*; d'où il suit encore que le parallélépipède AG contient autant de parallélépipèdes égaux à *ag* que le produit de la base ABCD par la hauteur AE contient d'unités.

258. 1er *corollaire.* — Si les trois arêtes AB, AD, AE étaient égales entre elles, le volume du parallélépipède AG serait mesuré par $\overline{AB}^2 \times \overline{AB} = \overline{AB}^3$, ou par la troisième puissance de AB; mais il est visible que, dans ce cas, les six faces du parallélépipède rectangle AG deviennent des carrés égaux : on lui donne alors le nom de *cube*, et de là vient qu'on appelle *cube* la troisième puissance d'un nombre.

259. 2e *corollaire.* — Puisqu'un parallélépipède quelconque peut toujours être transformé en un parallélépipède rectangle de même hauteur, et construit sur une base équivalente (**249**), il s'ensuit que le volume d'un parallélépipède quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur; et que, par conséquent, deux parallélépipèdes de même hauteur et de bases seulement équivalentes comprennent le même volume.

260. 3e *corollaire.* — Le volume du prisme triangulaire ABCEFG (*fig.* 129), étant équivalent à la moitié de celui du parallélépipède ABCDEFGH (**250**), aura pour mesure, d'après ce qui précède, la moitié du produit de la base de ce parallélépipède par sa hauteur; mais le triangle ABC, qui forme la base du prisme, n'étant que la moitié de celle du parallélépipède, il est évident que le volume d'un prisme triangulaire aura pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.

Le volume d'un prisme qui a une base quelconque ABCDE (*fig.* 128) s'exprime de la même manière; car si l'on partage le polygone ABCDE en triangles par des diagonales AC, AD, et que, par ces diagonales et par les arêtes parallèles qui leur sont contiguës, AF et CH, AF et DI, on mène des plans, on partagera le prisme AI en trois prismes triangulaires de même hauteur, et dont les bases seront ABC, ACD, ADE. En désignant par H la hauteur commune de ces prismes, ou la distance perpendiculaire des plans qui contiennent leurs bases inférieures et leurs bases supérieures, les mesures de leurs volumes respectifs seront

$$\overline{ABC}\times H,\ \overline{ACD}\times H,\ \overline{ADE}\times H;$$

leur somme $(ABC+ACD+ADE)H=\overline{ABCDE}\times H$ donnera le volume du prisme total AI.

On conclut de là que les volumes de deux prismes quelconques sont entre eux comme les produits de leur base par leur hauteur, et que, par conséquent, ils sont entre eux comme leurs hauteurs lorsqu'ils ont des bases équivalentes, ou comme leurs bases lorsqu'ils ont même hauteur, ou enfin que ces prismes sont équivalents lorsqu'ils ont à la fois même hauteur et des bases équivalentes, et cela, quelles que soient les figures de ces bases.

261. 4ᵉ *corollaire*. — Le volume d'un tétraèdre a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur, puisque ce volume est le tiers de celui du prisme, qui est mesuré par le produit de sa base par sa hauteur (254).

262. 5ᵉ *corollaire*. — Les mêmes mesures conviennent aux pyramides quelconques; car si l'on partage en triangles la base ABCDE de la pyramide quelconque SABCDE (*fig.* 127), et que l'on mène des plans par le sommet et par chacune des diagonales AC, AD, cette pyramide se trouvera partagée en trois tétraèdres de même hauteur, et dont les bases seront respectivement ABC, ACD, ADE : le volume de chacun de ces tétraèdres étant mesuré par le tiers du produit de sa base par sa hauteur, la somme des volumes de tous trois, ou celui de la pyramide proposée sera évidemment égal au tiers du produit de la somme de leurs bases par la hauteur commune, c'est-à-dire au tiers du produit de la base de la pyramide proposée par sa hauteur.

Il résulte de là que deux pyramides quelconques sont entre elles comme les produits de leur base par leur hauteur, et seulement comme leurs bases si les hauteurs sont les mêmes, ou comme leurs hauteurs si les bases sont équivalentes, ou enfin que ces pyramides sont équivalentes lorsqu'elles ont à la fois même hauteur et des bases équivalentes, quelles que soient d'ailleurs les figures de ces bases.

263. *Remarque.* — Puisqu'on peut trouver la hauteur de la pyramide dont un tronc donné à bases parallèles fait partie (234), il est évident qu'on aura le volume de ce tronc en calculant séparément le volume de la pyramide entière, celui de la pyramide retranchée, et prenant la différence des deux résultats.

On voit encore qu'un polyèdre quelconque pouvant toujours être partagé en pyramides (241), l'évaluation de son volume s'opérera en calculant séparément, d'après ce qui précède, celui de chacune des pyramides qu'il contient, et prenant la somme des résultats : je ne m'arrêterai donc pas sur ce sujet.

Cependant, il est une espèce de polyèdre à laquelle on peut ramener toutes les autres, et que, pour cette raison, il est bon de connaître : c'est le *prisme triangulaire tron-*

qué, qui ne diffère du prisme triangulaire ordinaire que parce que le plan opposé à sa base n'est point parallèle à cette base, et que, par conséquent, ses faces sont des trapèzes au lieu d'être des parallélogrammes. ABCDEF (*fig.* 140) est un prisme triangulaire tronqué.

THÉORÈME.

264. *Un prisme rectangulaire tronqué est toujours équivalent à trois tétraèdres de même base, et ayant leurs sommets respectifs placés à chacun des angles du triangle opposé à cette base.*

Démonstration. — En faisant passer un plan par les trois points A, C, E, on détacherait d'abord du prisme ABCDEF le tétraèdre EABC, dont la base est le triangle ABC, base du prisme, et dont le sommet est placé à l'angle E du triangle DEF opposé à cette base. Il resterait ensuite la pyramide quadrangulaire EACFD, qui se diviserait en deux tétraèdres EACD, ECFD, en menant par la diagonale DC et par le point E le plan DEC. Ces tétraèdres ne sont pas ceux qui sont désignés dans l'énoncé; mais en rétablissant le prisme dans son entier, on prouve facilement qu'ils sont équivalents à ces derniers.

En effet, si l'on mène dans la face ABED la diagonale BD, et que l'on conçoive le plan BDC, on aura le tétraèdre BACD, construit sur la base ACD du tétraèdre EACD, et de même hauteur, puisque les sommets B et E de l'un et de l'autre sont sur une même droite BE, parallèle au plan de leur base; mais on peut aussi considérer le tétraèdre BACD comme ayant son sommet au point D, et pour base le triangle ABC : ainsi, ce tétraèdre est tel que l'exige l'énoncé.

Pour trouver le tétraèdre équivalent à ECFD, il faut, dans les faces ACFD et BCFE, tirer les diagonales AF et BF; et concevant alors le plan AFB, on a le tétraèdre BACF, dont la base ACF est équivalente à la base CFD du tétraèdre ECFD, puisque ces deux triangles ont même base CF et sont compris entre les parallèles AD et CF; de plus, les tétraèdres, ayant leurs sommets sur la même droite BE, parallèle au plan de leur base, ont par conséquent la même hauteur : ils sont donc équivalents. Le tétraèdre BACF, considéré comme ayant son sommet placé en F, et pour base le triangle ABC, sera le troisième tétraèdre désigné dans l'énoncé.

265. *Corollaire.* — Il suit du théorème précédent, que le volume d'un prisme triangulaire tronqué a pour mesure le produit de sa base par le tiers de la somme des trois perpendiculaires abaissées sur cette base, de chacun des angles de la base supérieure, puisque ces perpendiculaires sont les hauteurs respectives des tétraèdres, à la somme desquels le prisme est équivalent, et qui ont tous pour base celle du prisme.

THÉORÈME.

266. *Deux polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes de leurs arêtes homologues.*

Démonstration. — 1°. Si les polyèdres proposés sont les pyramides S'ABCDE, S'FGHIK (*fig.* 127), on aura, par le n° 235,

$$ABCDE : FGHIK :: \overline{SP}^2 : \overline{S'Q}^2;$$

multipliant cette proportion par la proportion évidente

$$\tfrac{1}{3}SP : \tfrac{1}{3}S'Q :: SP : S'Q,$$

il viendra

$$\overline{ABCDE} \times \tfrac{1}{3}\overline{SP} : \overline{FGHIK} \times \tfrac{1}{3}\overline{S'Q} :: \overline{SP}^3 : \overline{S'Q}^3.$$

Les deux premiers termes de cette proportion, qui expriment les volumes des pyramides proposées, montrent que ces volumes sont entre eux comme les cubes de leurs hauteurs ; mais la similitude des pyramides donne aussi (233)

$$SP : S'Q :: SA : S'F :: AB : FG\,;$$

d'où l'on tire

$$\overline{SP}^3 : \overline{S'Q}^3 :: \overline{SA}^3 : \overline{S'F}^3 :: \overline{AB}^3 : \overline{FG}^3,$$

et, par conséquent,

$$SABCDE : S'FGHIK :: \overline{SA}^3 : \overline{S'F}^3 :: \overline{AB}^3 : \overline{FG}^3\,;$$

c'est-à-dire que *les pyramides semblables sont entre elles comme les cubes de leurs arêtes homologues, soit que ces arêtes partent du sommet, soit qu'elles se trouvent sur la base* (1).

2°. Lorsqu'il s'agit de deux polyèdres quelconques, on peut les concevoir partagés en un même nombre de pyramides semblables et semblablement disposées (243). Chacune des pyramides du premier polyèdre sera à celle qui lui correspond dans le second comme le cube de l'une de ses arêtes est au cube de l'arête homologue de l'autre pyramide; mais ces arêtes, qui sont nécessairement ou les arêtes mêmes des polyèdres proposés, ou les diagonales de leurs faces, ou enfin les diagonales qui joignent intérieurement les sommets de leurs angles polyèdres, sont, d'un polyèdre à l'autre, dans le même rapport (244); leurs cubes formeront, par conséquent, une suite de rapports égaux, et ces rapports étant aussi égaux à ceux des pyramides, il en faut conclure que ces derniers sont égaux entre eux. Par conséquent, la somme des pyramides du premier polyèdre est à la somme des pyramides du second comme une quelconque des pyramides de l'un est à la correspondante de l'autre, ou comme le cube de l'une quelconque des arêtes du premier polyèdre

(1) En imitant la construction et le raisonnement du n° 177, il serait facile de prouver que les *volumes de deux tétraèdres qui ont un angle dièdre commun sont entre eux comme les produits des arêtes qui, dans chacun, comprennent cet angle.*

est au cube de l'arête homologue du second. Substituant dans cette proportion, à la place des sommes des pyramides, les polyèdres qu'elles composent, il en résultera que ces corps sont entre eux dans le rapport des cubes de leurs arêtes homologues.

SECTION II.

DES CORPS RONDS.

267. Les corps ronds sont ceux qu'on produit en faisant tourner une figure plane autour d'une ligne droite. Je ne m'occuperai spécialement ici que du *cône droit,* du *cylindre droit* et de la *sphère*.

Le cône droit s'engendre en faisant tourner un triangle rectangle SAC (*fig.* 141) autour de l'un des côtés SC de l'angle droit; l'hypoténuse SA décrit dans ce mouvement *la surface conique droite* qui enveloppe le corps.

Un point quelconque A′ de cette droite décrit une circonférence de cercle dont le centre est sur la droite SC, autour de laquelle tourne le triangle SAC, et que, pour cette raison, on nomme l'*axe du cône;* car si l'on conçoit la droite A′C′ tirée dans le triangle générateur, perpendiculairement à cet axe, en tournant avec le triangle, elle décrira un plan perpendiculaire au côté SC (198), et sera évidemment le rayon du cercle A′D′B′.

Il suit de là que la surface conique coupée par un plan perpendiculaire à son axe donne une circonférence de cercle; et il est visible qu'un plan mené par son sommet la coupe, en général, suivant deux lignes droites.

Le cercle ADB décrit par le côté AC du triangle générateur, et qui ferme le cône, est la *base,* tandis que le point S est le *sommet;* et cette base est perpendiculaire à l'axe SC (1).

Les triangles semblables SAC et SA'C', donnant

$$AC : A'C' :: SC : SC' :: SA ; SA',$$

font voir que les rayons des cercles ADB et A'D'B' sont proportionnels à la distance de leur plan, au sommet du cône ; mais les circonférences des cercles étant entre elles comme leurs rayons (154), et leurs aires suivant le rapport des carrés de ces rayons (188), on aura encore

$$\text{circ. } ADB : \text{circ. } A'D'B' :: AC : A'C' :: SC : SC' :: SA : SA',$$
$$\text{aire } ADB : \text{aire } A'D'B' :: \overline{AC}^2 : \overline{A'C'}^2 :: \overline{SC}^2 : \overline{SC'}^2 :: \overline{SA}^2 : \overline{SA'}^2,$$

propriétés qui reviennent à celles qui ont été démontrées pour les pyramides dans les n^{os} 233 et 235.

268. *Remarque.* — Lorsqu'on a les dimensions d'un tronc de cône à bases parallèles BDAEB'D'A'E' (*fig.* 144), on calcule, par un procédé analogue à celui du n° 234, la hauteur du cône entier. En effet, les triangles ASO et A'S'O', étant semblables, donnent

$$AO : A'O' :: SO : SO';$$

d'où l'on tire

$$AO - A'O' : SO - SO' :: AO : SO,$$

ce qui revient à

$$AO - A'O' : OO' :: AO : SO,$$

proportion dans laquelle les trois premiers termes sont donnés, et qui fera connaître la hauteur du cône entier.

(1) On donne le nom de *cône droit* à celui que je décris ici, pour le distinguer du *cône oblique à base circulaire,* qui s'engendre en faisant tourner autour d'un point S (*fig.* 142) une droite SA, assujettie à toucher continuellement la circonférence d'un cercle ADB, situé dans un plan qui ne passe pas par le point S. La droite SC, que l'on nomme encore l'*axe du cône,* n'est plus perpendiculaire au plan de la base ADB.

THÉORÈME.

269. *Si l'on construit des polygones réguliers, inscrits et circonscrits à la base du cône, et que l'on joigne les angles de ces polygones avec le sommet du cône, ces lignes détermineront des pyramides dites* régulières, *parce que toutes leurs faces triangulaires seront égales; et parmi ces pyramides, on pourra toujours en trouver deux, l'une inscrite, l'autre circonscrite, telles, que la différence de leurs aires soit moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite que soit cette grandeur.*

Démonstration. — Soit $abcdef$ (*fig.* 143) le polygone inscrit dans la base du cône; en tirant les droites aS, bS, cS, etc., et joignant ces droites par des plans, on aura la pyramide S$abcdef$. L'aire de cette pyramide, sans y comprendre sa base $abcdef$, est composée des triangles aSb, bSc, cSd, etc., égaux entre eux, puisqu'ils sont formés par les côtés du polygone $abcdef$ que l'on suppose régulier, et par les obliques Sa, Sb, Sc, etc., qui s'écartent également de la perpendiculaire SO. L'aire de l'un de ces triangles, de aSb par exemple, a pour mesure $\frac{1}{2}ab \times \overline{Sg}$, $\overline{Sg}$ étant perpendiculaire sur ab. Leur somme aura pour mesure $\frac{1}{2}\text{N} \times \overline{ab} \times \overline{Sg}$, en désignant par N le nombre des côtés du polygone $abcdef$; et comme $\text{N} \times \overline{ab}$ est évidemment le contour de ce polygone, on en conclura que *l'aire de la pyramide régulière, lorsqu'on n'y comprend point sa base, a pour mesure la moitié du produit du contour de cette base par la perpendiculaire abaissée du sommet sur l'un de ces côtés.*

Dans la pyramide circonscrite, dont je n'ai représenté qu'une seule face ASB, pour ne pas trop compliquer la figure, les faces sont toutes égales entre elles comme dans la pyramide inscrite, parce que les arêtes SA, SB sont toujours des obliques qui s'écartent également de la perpendiculaire SO. Le milieu du côté AB du polygone circonscrit étant précisément le point de son contact avec la circonférence du cercle $aGbf$, la perpendiculaire SG, abaissée du point S sur AB, se confond avec le côté du cône. L'aire du triangle ASB a pour expression $\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{SG}$, et, par conséquent, celle de la pyramide entière, à l'exception de sa base, sera $\frac{1}{2}N\times\overline{AB}\times\overline{SG}$.

Cela posé, si l'on désigne par p et P les aires de la pyramide inscrite et de la pyramide circonscrite, et par p' et P' les contours de leurs bases, on aura

$$p=\frac{1}{2}p'\times\overline{Sg},\qquad P=\frac{1}{2}P'\times\overline{SG};$$

d'où l'on conclura

$$P-p=\frac{1}{2}P'\times\overline{SG}-\frac{1}{2}p'\times\overline{Sg}.$$

Mais il résulte de la nature des polygones réguliers inscrits et circonscrits au cercle (151), que les contours de ces polygones approchent sans cesse de l'égalité à mesure que l'on multiplie leurs côtés; et il est visible que, dans les mêmes circonstances, la différence entre les droites SG et Sg peut devenir aussi petite qu'on voudra : les produits $\frac{1}{2}P'\times\overline{SG}$ et $\frac{1}{2}p'\times\overline{Sg}$ approcheront donc aussi sans cesse de l'égalité, et la différence des aires de la pyramide inscrite et de la pyramide circonscrite pourra, par conséquent, devenir moindre que telle grandeur donnée qu'on voudra.

270. *Corollaire.* — Il est évident que plus on multiplie les côtés des polygones inscrits et circonscrits, plus les pyramides inscrites et circonscrites approchent de se confondre avec le cône, et plus en même temps l'aire de la pyramide inscrite augmente, tandis que celle de la pyramide circonscrite diminue. En effet, le contour du polygone inscrit augmente toujours, ainsi que la droite Sg, qui, en s'approchant de la surface conique, s'éloigne

sans cesse de la perpendiculaire SO, tandis que le contour du polygone circonscrit diminue sans cesse en s'approchant du cercle, et que la droite SG conserve la même grandeur. Il suit évidemment de là que, pour l'étendue, l'aire du cône est toujours comprise entre celles de la pyramide inscrite et de la pyramide circonscrite; mais comme, par le théorème précédent, on peut rendre la différence de ces dernières moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite qu'elle soit, on pourra toujours, à plus forte raison, rendre la différence entre l'aire du cône et celle de la pyramide inscrite ou de la pyramide circonscrite, aussi petite qu'on le voudra.

THÉORÈME.

271. *L'aire d'un cône droit a pour mesure la moitié du produit de la circonférence du cercle qui lui sert de base par son côté, ou* $\frac{1}{2}$ CR, *en nommant la première* C *et le second* R.

Démonstration. — Si P représente actuellement le périmètre du polygone circonscrit, l'aire de la pyramide circonscrite sera exprimée par $\frac{1}{2}$ PR (269), puisque R est la même chose que SG; et désignant par X la vraie mesure de l'aire du cône, les trois quantités $\frac{1}{2}$ PR, $\frac{1}{2}$ CR et X seront dans le cas du n° 186, puisque la première, toujours plus grande que les deux autres, en vertu du n° 270, et à cause que $P > C$, peut en approcher d'aussi près qu'on voudra : on aura donc

$$X = \frac{1}{3}\,CR\ (1).$$

(1) Ce théorème se démontrerait immédiatement par un raisonnement analogue à celui de la note du n° 187, en substituant des pyramides aux polygones employés dans la note citée. Le lecteur trouvera aisément de quelle manière il faudrait modifier ce raisonnement pour l'appliquer aux propositions des nos 275, 280, 283, 297 et 304, qui complètent la mesure de l'aire et du volume des corps ronds.

THÉORÈME.

272. *L'aire de la portion qui reste de la surface conique après qu'on en a retranché une partie* SA'D'B' *par un plan parallèle à la base, ou l'aire du cône tronqué* ADBEA'D'B'E' (fig. 144) *a pour mesure la moitié du produit de la somme des circonférences de ses deux bases* ADB *et* A'D'B' par son côté AA'.

Démonstration. — Si l'on élève par le point A, perpendiculairement à SA, la droite AC, égale en longueur à la circonférence ADBE, et que l'on tire SC, l'aire du triangle rectangle SAC ayant pour mesure $\frac{1}{2}\,\overline{AC}\times\overline{SA}$, est équivalente à l'aire du cône SADBE (numéro précédent). Tirant ensuite la droite A'C' parallèle à AC, les triangles SAC et SA'C', semblables entre eux, donneront

$$AC : A'C' :: SA : SA';$$

mais on a aussi (267)

$$\text{circonf. ADBE} : \text{circonf. A'D'B'E'} :: SA : SA';$$

le rapport SA : SA', commun entre ces deux proportions, conduit à la suivante,

$$\text{circonf. ADBE} : \text{circonf. A'D'B'E'} :: AC : A'C';$$

et puisque AC = circonf. ADBE, par construction, il en résulte

$$A'C' = \text{circonf. A'D'B'E'}.$$

Il suit de là que l'aire du triangle SA'C', égale à $\frac{1}{2}\,\overline{A'C'}\times\overline{SA'}$, sera équivalente à celle du cône retranché SA'D'B'E' : l'aire du trapèze ACC'A' sera donc équivalente à celle du tronc de cône ADBEA'D'B'E'; et comme la droite AA' est perpendiculaire aux droites AC et A'C', la mesure du trapèze ACC'A' sera (175)

$$\tfrac{1}{2}\,AA'(AC + A'C'),$$

PROBLÈME.

276. *Trouver le volume d'un tronc de cône droit à bases parallèles.*

Solution. — Il faudra prolonger les côtés AA' et BB' (*fig.* 144) jusqu'à ce qu'ils se rencontrent, pour connaître la hauteur SO du cône entier (268), au moyen de laquelle on aura pour le volume de ce corps, $\frac{1}{3}\overline{SO} \times \overline{ADBE}$; et soustrayant de SO la hauteur du tronc OO', le reste SO' sera la hauteur du cône retranché, dont le volume sera, par conséquent, exprimé par $\frac{1}{3}\overline{SO'} \times \overline{A'D'B'E'}$. La différence entre ce produit et le précédent sera le volume du tronc de cône proposé.

277. Si l'on conçoit que le rectangle ACC'A' (*fig.* 145) tourne autour de l'un de ses côtés CC', il engendrera le corps appelé *cylindre droit*; la ligne AA' décrira dans ce mouvement la *surface cylindrique droite.*

Un point quelconque A'' de cette droite décrira la circonférence du cercle A''D''B'', égal et parallèle au cercle ADB engendré par AC, et que l'on nomme la *base* du cylindre; car la droite A''C'', perpendiculaire à CC' et égale à AC, décrira, en tournant autour de CC', un plan parallèle au plan ADB et dont l'intersection avec la surface cylindrique sera A''D''B''. Il résulte de là que la section de la surface du cylindre droit par un plan parallèle à sa base est un cercle égal à cette base.

Le cylindre est terminé supérieurement par une base A'D'B' égale et parallèle à sa base inférieure ADB. La droite CC' autour de laquelle tourne le parallélogramme ACC'A', et qui contient évidemment les centres des bases et ceux des sections qui leur sont parallèles, se nomme l'*axe du cylindre*, et est perpendiculaire à la base (1).

---

(1) Le *cylindre oblique* est celui que renferme la surface décrite par une

THÉORÈME.

278. *Si l'on inscrit et circonscrit au cercle qui sert de base à un cylindre des polygones d'un même nombre de côtés, et que, par les sommets des angles de ces polygones, on mène des droites parallèles à l'axe* OO′ (fig. 147) *en joignant leurs extrémités supérieures par d'autres droites, on formera deux prismes, l'un inscrit, l'autre circonscrit au cylindre proposé; et l'on pourra toujours prendre ces prismes tels, que la différence de leurs aires soit moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite que soit cette grandeur.*

Démonstration. — Les droites aa', bb', etc., élevées parallèlement à OO′, et, par conséquent, perpendiculaires au plan $abcdef$, seront sur la surface du cylindre, puisque les rectangles $aOO'a'$, $bOO'b'$ sont égaux au rectangle générateur. Il est évident d'ailleurs que les rectangles $abb'a'$, $bcc'b'$, etc., sont égaux, puisqu'ils ont visiblement deux angles et trois côtés égaux chacun à chacun (85). Les arêtes aa', bb', etc., étant perpendiculaires sur ab, bc, etc., les aires des rectangles ab', bc', etc., seront exprimées par $\overline{ab} \times \overline{aa'}$, $\overline{bc} \times \overline{bb'}$, etc.; réunissant ces produits, en observant qu'ils ont tous un facteur commun, puisque $aa = bb' =$ etc., l'aire du prisme inscrit, sans y comprendre les bases $abcdef$, $a'b'c'd'e'f'$, sera exprimée par $(ab + bc + cd + de + ef + fa) \times aa'$,

droite quelconque AA′ (*fig.* 146), assujettie à glisser parallèlement à elle-même le long de la circonférence d'un cercle ADB. Si l'on considère la droite génératrice AA′ parvenue dans une position quelconque DD′; que, par le centre de la base, on mène CC′ parallèle et égale à AA′, qu'on termine le corps par un plan A′D′B′ parallèle à ADB, en tirant C′D′, on formera le parallélogramme DCC′D′, et l'on aura C′D′ = CD. Ainsi, la base supérieure A′D′C′ du cylindre oblique sera un cercle, aussi bien que sa base inférieure et toutes les sections qui lui sont parallèles; mais l'axe CC′ ne sera point perpendiculaire sur cette base, comme dans le cylindre droit.

ou par $p \times \mathrm{H}$, si p désigne le périmètre du polygone $abcdef$ et H la hauteur aa', commune au prisme et au cylindre.

Pour éviter la confusion, je n'ai représenté qu'une seule face ABB'A' du prisme circonscrit. Il est visible que si, dans cette face et par le point G, où le côté AB touche le cercle, on tire GG' parallèlement à OO', cette droite sera sur la surface cylindrique, puisque le rectangle GOO'G' est égal au rectangle générateur. L'aire du rectangle ABB'A' étant exprimée par $\overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{GG}'}$, l'aire totale du prisme circonscrit, en n'y comprenant point les bases, sera égale au contour P du polygone circonscrit, multiplié par la hauteur GG' ou H commune à tous les parallélogrammes qui forment l'enveloppe du prisme circonscrit et celle du prisme inscrit.

Cela posé, la différence entre l'aire convexe du prisme inscrit et celle du prisme circonscrit sera

$$\mathrm{P} \times \mathrm{H} - p \times \mathrm{H} = (\mathrm{P} - p)\,\mathrm{H},$$

et pourra devenir aussi petite qu'on voudra, en prenant des polygones inscrits et circonscrits dont les contours P et p diffèrent l'un de l'autre de moins que telle grandeur donnée qu'on voudra.

279. *Corollaire.* — Il suit évidemment de la proposition précédente, et par les raisons déjà développées dans le nº 270, que la surface cylindrique est moindre que celle du prisme circonscrit et plus grande que celle du prisme inscrit, et que l'on peut, par conséquent, trouver un prisme, soit inscrit, soit circonscrit, dont l'aire diffère aussi peu qu'on voudra de l'aire du cylindre droit.

THÉORÈME.

280. *L'aire de la surface convexe du cylindre droit a pour mesure le produit de la circonférence de sa base par sa hauteur* H, *ou le produit* CH.

Démonstration. — Si l'on désigne par P le contour du polygone qui sert de base au prisme circonscrit au cylindre, et par X la vraie mesure de ce dernier, on aura PH pour l'aire du prisme circonscrit, et il est visible que les trois quantités PH, CH et X seront dans le cas du n° 186 : on aura donc $X = CH$.

THÉORÈME.

281. *On peut toujours former deux prismes, l'un inscrit et l'autre circonscrit au cylindre, tels, que leurs volumes diffèrent aussi peu qu'on voudra.*

Démonstration. — Le volume du prisme inscrit $abcdef\,a'b'c'd'e'f'$ est égal à $\overline{abcdef} \times H$ (260); et désignant l'aire du polygone inscrit par p, celle du polygone circonscrit par P, le volume du prisme inscrit sera mesuré par pH, et celui du prisme circonscrit par PH : leur différence étant $(P - p)$, H pourra devenir aussi petite qu'on voudra, puisque la différence $P - p$ entre l'aire du polygone inscrit et celle du polygone circonscrit peut être rendue moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite qu'elle soit (184).

282. *Corollaire.* — Il suit de là que l'on peut construire un prisme inscrit et un prisme circonscrit tels, que leurs volumes diffèrent aussi peu qu'on voudra de celui du cylindre, qui sera d'ailleurs toujours plus grand que le premier et moindre que le second.

THÉORÈME.

283. *Le volume d'un cylindre droit a pour mesure le produit de l'aire de sa base par sa hauteur, ou* $C'H$, C' *étant l'aire de cette base.*

Démonstration. — Si l'on désigne par P' l'aire du polygone circonscrit, $P'H$ sera la mesure du volume du prisme circonscrit; et si X désigne la vraie mesure du cylindre, les trois quantités P′H, C′H et X se trouvant dans le cas du n° 286, on aura nécessairement X = C′H (1).

284. Si le demi-cercle ACB tourne autour de son diamètre AB (*fig.* 148), il engendrera la *sphère*, et la demi-circonférence qui l'enveloppe décrira la *surface sphérique*.

Dans ce mouvement, un point quelconque D, de l'arc ACB, décrira évidemment une circonférence de cercle ayant pour rayon la perpendiculaire DE, abaissée sur le diamètre AB que l'on nomme *axe*. Il faut pourtant excepter de cette remarque les extrémités A et B de l'axe, qui restent immobile comme tous les points de cet axe, et que l'on nomme *pôles*.

La surface sphérique a tous ses points également éloignés du point O, centre du cercle générateur; car ce point ayant conservé la même situation sur le plan du demi-cercle ACB, dans toutes les positions prises par ce plan, sa distance à chacun des points de l'arc ACB, qui ont passé successivement par tous ceux de la sphère, n'a pas varié.

Il suit de là que le rayon du cercle ACB est aussi celui de la sphère.

THÉORÈME.

285. *La section de la sphère par un plan quelconque est toujours un cercle.*

Démonstration. — La proposition est évidente par elle-même, d'après ce qui précède, lorsque le plan coupant passe par le centre de la sphère; et alors la circonférence de cette section a pour rayon celui de la sphère.

Mais si DGFH désigne un plan quelconque, et que du centre O on abaisse sur ce plan la perpendiculaire

---

(1) Le théorème ci-dessus a également lieu à l'égard du cylindre oblique; car il est facile de voir que le théorème et le corollaire précédents ne supposent pas que l'axe du cylindre et les arêtes des prismes soient perpendiculaires au plan de la base.

OE, le pied E de cette perpendiculaire sera à égale distance de tous les points de la section DGFH; car toutes les obliques OD, OG, OF, OH, étant égales comme rayons de la sphère, s'écarteront également de OE (200) : la courbe DGFH sera donc un cercle ayant son centre en E, et DE pour rayon.

286. *Remarque.* — La droite DE étant nécessairement moindre que le rayon OD, le cercle DGFH sera moindre que celui qui résulterait d'une section faite par le centre de la sphère : ce dernier serait un *grand cercle,* tandis que l'autre n'est qu'un *petit cercle.*

Tous les grands cercles, ayant même rayon, sont égaux entre eux.

287. *Corollaire.* — Deux grands cercles, ACBF, AIBH, se coupent toujours en deux parties égales, car il est évident qu'ils ne peuvent se rencontrer que dans la droite AB, commune section de leurs plans, qui, passant par leur centre commun, est en même temps le diamètre de l'un et de l'autre, et les partage, par conséquent, en deux parties égales.

288. Trois cercles qui se coupent deux à deux sur la surface de la sphère forment un *triangle sphérique;* mais on ne considère ordinairement que celui qui, comme ICM, est formé par trois arcs de grand cercle plus petits que la demi-circonférence.

Si du centre de la sphère on mène des rayons aux points C, I et M, il est visible que ces rayons détermineront un angle trièdre OCIM, dont les angles plans IOC, IOM, MOC seront mesurés par les arcs CI, IM et CM.

THÉORÈME.

289. *La somme de deux côtés d'un triangle sphérique est toujours plus grande que le troisième.*

Démonstration. — Puisqu'en vertu du n° 222, la somme de deux quelconques des trois angles plans IOC, IOM, MOC, qui forment l'angle trièdre OCIM, surpasse le troisième, et que les arcs CI, IM et CM, qui mesurent ces angles, sont du même rayon, il en résulte nécessairement que la somme de deux quelconques de ces arcs, qui serait la mesure de la somme des angles auxquels ils correspondent (110), doit surpasser le troisième.

290. 1er *corollaire.* — Il suit de là que le plus court chemin pour aller d'un point à un autre sur la surface sphérique, est l'arc du grand cercle déterminé par le plan qui passe par ces deux points et par le centre de la sphère; car si l'on assignait pour plus court chemin, entre les points A et B (*fig.* 149), une ligne AMNB, différente du grand cercle AB qui passe par ces points, que l'on prît un point M sur cette ligne, et que l'on tirât les arcs de grand cercle AM et MB, on aurait (numéro précédent)

$$AM + MB > AB.$$

Prenant entre M et B le point N, et menant les arcs de grand cercle MN et NB, on aurait encore

$$MN + NB > MB,$$

et, par conséquent,

$$AM + MN + NB > AM + MB.$$

En continuant ainsi, on voit que plus on s'approche de la ligne AMNB, plus le chemin à parcourir pour aller de A en B augmente, d'où il est évident que AB est le plus court. Et l'on n'en saurait trouver d'autre; car le grand cercle que l'on mènerait par deux points quelconques de l'arc AB se confondrait avec cet arc, puisque tous ses points et le centre de la sphère sont compris dans un seul plan.

J'ai supposé la ligne AMNB extérieure à tous les grands cercles menés par deux quelconques de ses points; mais si le contraire avait lieu, ainsi qu'on le voit dans la partie ponctuée MN'A, on tirerait les arcs de grand cercle MN' et AN'; et comme on aurait

$$AN' + MN' > AM,$$

il en résulterait encore

$$AN' + MN' + MN + NB > AM + MB > AB.$$

291. 2° *corollaire*. — Il suit encore du même théorème que la somme des côtés d'un triangle sphérique est moindre que la circonférence d'un grand cercle; car si l'on prolonge les côtés AI et AM du triangle MAI (*fig.* 148) jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en B, on aura (**289**)

$$IM < BM + BI;$$

ajoutant de part et d'autre AM + AI, il viendra

$$AM + AI + IM < BM + BI + AM + AI.$$

Or les arcs AM et BM forment la demi-circonférence ACB, les arcs AI et BI la demi-circonférence AIB, égale à la première (**286**) : les quatre arcs réunis composent donc une circonférence de grand cercle, laquelle surpasse, par conséquent, la somme des côtés du triangle MAI.

Il est facile de voir que cette proposition résulte aussi des nos **226** et **288**.

THÉORÈME.

292. *Si, par le centre d'un cercle quelconque* DGFH, *tracé sur la sphère, on élève une perpendiculaire* AE, *elle passera par le centre de la sphère, et la coupera en deux points* A *et* B, *dont chacun sera également éloigné de tous ceux de la circonférence* DGFH.

Démonstration. — En effet, il est évident, par le n° **200**, que la perpendiculaire AE doit passer par une suite de points tels, que chacun soit à égale distance des points de la circonférence DGFH, décrite du pied E de cette perpendiculaire comme centre. Or le point O, centre de la sphère, ayant la même propriété, doit, par conséquent, se trouver sur AE, et les points A et B, où AE rencontre la sphère, doivent être chacun à égale distance des points de la circonférence DGFH : bien entendu que la distance de ces derniers au point A n'est égale à leur distance au point B que quand le point E tombe en O, ou qu'il s'agit d'un grand cercle CILK.

Il est visible que les arcs AD, AG, AF, AH ayant pour cordes les distances du point A à chacun des points de la circonférence DGFH, et étant pris sur des grands cercles qui ont tous même rayon, sont égaux.

293. *Corollaire.* — Il suit de ce qui précède que les points A et B peuvent servir à décrire le cercle DGFH, sans qu'il soit besoin de connaître son centre, placé dans l'intérieur de la sphère, puisqu'il suffit de marquer tous les points dont les distances au point A ou au point B, mesurées sur la surface sphérique par les arcs de grand cercle AD et AG ou BD et BG, sont égales à celle que l'on a choisie pour décrire le cercle proposé.

Les points A et B se nomment, en conséquence, les *pôles* du cercle DGFH, et la droite AE en est l'*axe*.

THÉORÈME.

294. *Le plan mené par un point de la surface de la sphère, perpendiculairement au rayon qui passe par ce point, est tangent à la sphère;* et réciproquement, *le plan tangent à un point quelconque de la surface sphérique est perpendiculaire à l'extrémité du rayon.*

Démonstration. — Le plan AB (*fig.* 150), étant perpendiculaire sur le rayon OC, au point C, a tous ses autres points plus éloignés du centre O de la sphère que ne l'est le point C, puisque les obliques quelconques OD, OE, etc., sont plus longues que la perpendiculaire OC (200) : donc les points D, E, etc., sont hors de la sphère, et le plan AB, n'ayant qu'un seul point C de commun avec la surface de cette sphère, lui est tangent.

Réciproquement, le plan tangent à la sphère en C ne peut être que le plan AB, perpendiculaire sur le rayon OC; car ce plan n'ayant de commun avec la sphère que le point de *contact* C, et tous ses autres points étant plus éloignés du centre que celui-ci, il s'ensuit que le rayon OC est la plus courte ligne qu'on puisse mener du centre au plan tangent, et que, par conséquent, il est perpendiculaire à ce plan.

THÉORÈME.

295. *Si l'on inscrit et si l'on circonscrit à un arc quelconque d'un demi-cercle deux portions de polygones réguliers du même nombre de côtés, et qu'on fasse tourner le demi-cercle autour de son diamètre, avec les portions de polygones, il sera toujours possible de rendre la différence entre l'aire du corps décrit par la portion inscrite, et l'aire du corps décrit par la portion circonscrite, aussi petite qu'on voudra.*

Démonstration. — L'aire du corps décrit par la portion de polygone *abcd* (*fig.* 151), quand elle tourne avec l'arc *ad* autour du diamètre *ap*, se compose des aires que décrit en particulier chacun de ses côtés. Le premier *ab* décrit un cône entier, et les autres des troncs de cône ayant pour bases les cercles engendrés par les perpendiculaires *be*, *cf*, *dg*, abaissées des points *b*, *c*, *d* sur l'axe *a*O (267). L'aire de l'un de ces corps, de celui que décrit *cd* par exemple, s'obtient en abaissant du milieu de ce côté, sur *a*O, la perpendiculaire *lq*, et est égale à $cd \times \text{circ}.\,lq$ (272); mais cette expression peut être transformée en une autre ne contenant plus le facteur circ. *lq*, qui change à chaque cône. Pour cela, on abaisse *cr* perpendiculaire sur *dg*, on tire *l*O; et les triangles dcr et qlO, semblables comme ayant les côtés perpendiculaires chacun à chacun (65), donnent

$$cd : cr :: lO : lq.$$

Mais cr est égal à fg, et les circonférences des cercles étant entre elles comme leurs rayons, on peut substituer au rapport de lO à lq celui des circonférences de cercle dont ces lignes seraient les rayons, et l'on aura

$$cd : fg :: \text{circ. } lO : \text{circ. } lq,$$

d'où l'on conclura

$$cd \times \text{circ. } lq = fg \times \text{circ. } lO;$$

donc l'aire du cône décrit par cd aura aussi pour expression $fg \times$ circ. lO, c'est-à-dire *le produit de sa hauteur par la circonférence du cercle inscrit au polygone dont son côté fait partie.* Il en est de même des aires des cônes décrits par les autres côtés et dont les hauteurs sont ef et ae. La circonférence du cercle inscrit étant un facteur commun à toutes ces aires, leur somme, ou l'aire du corps décrit par la portion $abcd$ du polygone inscrit, sera donc égale à la somme des lignes fg, ef, ae, c'est-à-dire à la partie ag de l'axe comprise entre l'extrémité a du premier côté et la perpendiculaire abaissée sur cet axe par l'extrémité du dernier côté, multipliée par la circonférence du cercle inscrit, ou à $ag \times$ circ. lO.

Par la même raison, l'aire du corps décrit par la portion ABCD du polygone circonscrit aura pour expression AG $\times$ circ. LO. Cette dernière quantité surpassera toujours la première, d'abord parce que circ. LO sera toujours plus grande que circ. lO, ensuite parce que AG surpasse ag. En effet, on a

$$AG = aG + Aa \quad \text{et} \quad ag = aG + Gg,$$

d'où il résulte

$$AG - ag = Aa - Gg = Dd - Gg,$$

puisque $Aa = Dd$; mais il est visible que $Gg < Dd$, et qu'on peut rendre Aa ou Dd aussi petit qu'on voudra, en multipliant suffisamment le nombre des côtés des polygones : il en sera donc de même de la différence des lignes Dd et Gg, nécessairement moindre que la plus grande de ces lignes. Par conséquent, AG surpassera toujours ag, et pourra en approcher d'aussi près qu'on voudra (1). Dans cette circonstance, LO et lO s'approchant également de plus en plus, circ. LO diffère de moins en moins de circ. lO : on pourra donc rendre la différence $\text{AG} \times \text{circ. LO} - ag \times \text{circ. } l\text{O}$ moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite qu'elle soit, en considérant cette différence comme celle de deux rectangles dont les bases et les hauteurs peuvent être aussi près que l'on voudra de l'égalité.

296. *Corollaire.* — L'expression $\text{AG} - ag = \text{D}d - \text{G}g$ montre aussi que AG diminue en même temps que $\text{D}d$, car la hauteur ag est commune à tous les polygones inscrits à l'arc ad; et LO demeurant aussi le même, il en résulte que l'aire du corps décrit par la portion ABCD diminue en se rapprochant de la sphère. L'augmentation de lO dans la même circonstance prouve que l'aire du corps décrit par $abcd$ croît alors, et que, par conséquent, l'aire de la portion de sphère décrite par $a\text{L}d$ est moindre que celle du premier de ces corps, et plus grande que celle du second. Il suit de là qu'on peut assigner deux corps de ce genre, dont l'aire diffère aussi peu que

(1) Le triangle DOG donne (59)

$$d\text{O} : g\text{O} :: \text{D}d : \text{G}g, \quad \text{d'où} \quad \text{G}g = \text{D}d \times \frac{g\text{O}}{d\text{O}};$$

ce qui prouve encore que $\text{G}g < \text{D}d$, puisque gO n'est que l'un des côtés du triangle rectangle dont dO est l'hypoténuse. De plus, le point g étant l'extrémité commune de toutes les portions de polygones inscrits à l'arc ad, les lignes gO et dO ne changent point, non plus que leur rapport : $\text{G}g$ diminue donc en même temps que $\text{D}d$.

l'on voudra de celle de la portion de la sphère décrite par l'arc.

THÉORÈME.

297. *L'aire de la portion de sphère, ou* calotte sphérique, *décrite par un arc qui ne surpasse pas le quart de la circonférence du cercle générateur, est égale au produit de cette circonférence par la partie du diamètre qui mesure la hauteur de la calotte.*

Démonstration. — Soit X la vraie mesure de l'aire décrite par l'arc ad; en la comparant à celle du corps décrit par la portion de polygone circonscrit ABCD, on aura les trois quantités

$$AG \times \text{circ. LO}, \quad ag \times \text{circ. LO}, \text{ et } X;$$

la première étant toujours plus grande que les deux autres, dont elle peut approcher d'aussi près que l'on voudra, on en conclura, par le n° 186,

$$X = ag \times \text{circ. LO}.$$

298. 1^er^ *corollaire.* — Il suit de là que l'aire de la sphère entière a pour mesure le produit de son diamètre par la circonférence d'un grand cercle, c'est-à-dire $ap \times$ circ. LO. En effet, le théorème précédent s'applique au quart de cercle aLm, et donne $aO \times$ circ. LO pour l'aire de la demi-sphère qu'il engendre en tournant autour de l'axe aO; pour le second quart de cercle pnm, on a de même $pO \times$ circ. LO : la somme de cette quantité et de la précédente est

$$(aO + pO) \text{ circ. LO} = ap \times \text{circ. LO}.$$

En général, l'aire d'une portion quelconque de la surface sphérique comprise entre deux plans parallèles, ou d'une *zone,* est égale à la hauteur de cette zone, ou à la distance perpendiculaire des plans qui la terminent, multipliée par la circonférence d'un grand cercle; car si de la calotte décrite par l'arc aLm, et dont l'aire est mesurée par $aO \times$ circ. LO, on retranche la calotte décrite par l'arc aLd, et dont l'aire est mesurée par $ag \times$ circ. LO, on aura

$$(aO - ag) \text{ circ. LO} = Og \times \text{circ. LO},$$

pour l'aire de la zone décrite par l'arc dm.

On trouverait d'une manière analogue que la zone décrite par l'arc mn doit être exprimée par $Oo \times$ circ. LO; et en ajoutant ce produit à $Og \times$ circ. LO, on aurait, dans le résultat $(Oo + Og)$ circ. LO $= og \times$ circ. LO, l'expression de l'aire de la zone décrite par l'arc dmn, laquelle comprend le centre de la sphère.

299. 2[e] *corollaire.* — Il suit encore de ce qui précède, que l'aire de la surface sphérique est quadruple de celle de son grand cercle; car l'aire de ce dernier est exprimée par $\frac{1}{2}$CR, si l'on désigne sa circonférence par C et son rayon par R (187). Mais nommant D le diamètre, on aura $R = \frac{1}{2}D$, et, par conséquent, $\frac{1}{2}R = \frac{1}{4}D$; d'où l'on tirera $\frac{1}{4}$CD pour l'aire du grand cercle, résultat qui n'est en effet que le quart du produit CD, par lequel se mesure l'aire de la sphère (numéro précédent).

THÉORÈME.

300. *L'aire de la portion* ACBIA (fig. 148) *comprise entre deux grands cercles qui se coupent, et que l'on nomme* fuseau sphérique, *est à la surface de la sphère comme l'arc* CI *du cercle* CILK, *perpendiculaire à l'intersection commune des plans* BCA *et* BIA, *est à sa circonférence, ou comme l'angle plan qui mesure leur angle dièdre* CABI *est à quatre droits.*

Démonstration. — La proposition est évidente lorsque l'arc CI est partie aliquote de la circonférence CILK; car si l'on conçoit cette circonférence divisée en effet dans ses parties aliquotes, et que, par les points A, B et par les points de division on mène des grands cercles, la surface sphérique sera partagée en autant de fuseaux égaux à ACBIA que le cercle CILK contient de parties; puisqu'il est visible que deux fuseaux de la même sphère sont égaux lorsque les plans des cercles qui les déterminent font le même angle dièdre.

Quand l'arc CI n'est pas aliquote de la circonférence, on prouve, par un raisonnement analogue à celui du n° 109, que le rapport du fuseau ACBIA à la surface entière de la sphère ne peut être ni moindre ni plus grand que celui de l'arc CI à la circonférence CILK.

Le plan CILK étant perpendiculaire à la droite AB, l'angle plan COI mesure évidemment l'angle dièdre CABI; et puisque le rapport de cet angle à quatre droits est le même que celui de l'arc CI qui le mesure avec la circonférence CILK (110), il s'ensuit nécessairement que l'angle COI est à quatre droits comme l'aire du fuseau ACBIA est à celle de la sphère.

THÉORÈME.

301. *L'aire d'un triangle sphérique est à celle de la sphère entière comme la différence entre la somme des trois angles dièdres formés par les cercles qui composent ce triangle et deux angles droits est à huit angles droits.*

Démonstration. — Les trois cercles ACBL, CILK et MIFK, qui forment le triangle sphérique CIM, partagent la surface sphérique en huit triangles, parmi lesquels CKM et FIL sont égaux, ainsi que l'on peut s'en convaincre en remarquant que les angles trièdres OCKM et OFIL auxquels ils correspondent (288) ont toutes leurs parties égales (1). Cela posé, en désignant la surface de la sphère

(1) L'égalité des parties de ces angles trièdres prouve bien celle des parties des triangles sphériques; mais il est facile de voir que les côtés de

par S, et l'angle droit par D, l'aire du fuseau ICKMI aura pour expression (numéro précédent)

$$\frac{S \times \text{angl CIKM}}{4D};$$

et comme ce fuseau est composé des triangles CIM, CKM, on aura

$$\text{CIM} + \text{CKM} = \frac{S \times \text{angl CIKM}}{4D};$$

l'aire du fuseau MIFAM étant

$$\frac{S \times \text{angl IMFA}}{4D},$$

on trouvera

$$\text{CIM} + \text{CIF} = \frac{S \times \text{angl IMFA}}{4D};$$

enfin, le fuseau CILBC, dont l'aire est exprimée par

$$\frac{S \times \text{angl ICLB}}{4D},$$

---

ces triangles ne sont pas assemblés de la même manière, et qu'on ne peut, par conséquent, les appliquer l'un sur l'autre (**228**).

Cavalleri, à qui l'on doit la proposition ci-dessus (*Directorium generale uranometricum;* Bononiæ, 1632, page 316), et les auteurs qui l'ont suivi ont regardé l'égalité des triangles sphériques dont les côtés sont égaux chacun à chacun comme analogue à celle des triangles rectilignes, sans faire attention qu'on ne pouvait pas retourner la surface sphérique comme le plan; mais au fond cette difficulté est plus apparente que réelle, et il y a plusieurs manières de se convaincre de l'égalité des aires des triangles dont il s'agit En voici d'ailleurs une démonstration.

Si par les sommets des angles de chacun des triangles proposés on fait passer un cercle, et que par son pôle on mène des arcs de grand cercle aux angles des triangles proposés, ces arcs seront égaux (**293**); on formera par ce moyen sur chaque côté des triangles proposés un triangle sphérique isocèle. Les triangles rectilignes formés par les cordes des côtés des triangles sphériques proposés étant égaux (**99**), les cercles dont on vient de parler seront aussi égaux (**119**), et auront leurs pôles placés aux mêmes distances de leur circonférence; par conséquent, les trois triangles sphériques isocèles du premier des triangles proposés seront évidemment égaux aux droits du second, chacun à chacun, et les aires des triangles proposés seront formées de la même manière avec celles des nouveaux triangles.

donnera

$$CIM + MIL = \frac{S \times \text{angl ICLB}}{4D}.$$

Si l'on met à la place du triangle CKM son égal FIL, et qu'on ajoute ces expressions, en observant que CIM + CIF + FIL + MIL composent la moitié de la surface sphérique située en avant du plan ACBL, ou l'*hémisphère* IACBL, il viendra

$$2\,CIM + \tfrac{1}{2}S = \frac{S}{4D}(\text{angl CIKM} + \text{angl IMFA} + \text{angl ICLB}).$$

Les trois angles dièdres CIKM, IMFA, ICLB sont évidemment ceux que forment entre eux les plans des côtés du triangle sphérique CIM; et, pour abréger, je les désignerai par une seule lettre de leur arête, savoir, celle qui se trouve à l'intersection des deux côtés du triangle : de cette manière les angles CIKM, IMFA, ICLB seront respectivement les angles I, M, C, et, par conséquent,

$$2\,CIM + \tfrac{1}{2}S = \frac{S}{4D}(I + M + C).$$

Retranchant de part et d'autre $\frac{1}{2}S$, on obtiendra

$$2\,CIM = \frac{S(I + M + C)}{4D} - \tfrac{1}{2}S;$$

réduisant ensuite au même dénominateur tous les termes de cette expression de 2 CIM, et prenant la moitié du résultat, il viendra

$$CIM = \frac{S(I + M + C - 2D)}{8D},$$

ce qui donnera

$$CIM : S :: I + M + C - 2D : 8D\,(1).$$

(1) Les angles I, M et C sont les angles mêmes du triangle sphérique. (*Voyez* le *Traité élémentaire de Trigonométrie et d'application de l'Algèbre à la Géométrie*, chap. II.)

THÉORÈME.

302. *Si, par les extrémités des portions correspondantes de polygones réguliers, inscrites et circonscrites au même arc, on tire deux rayons, on formera deux secteurs polygonaux qui, en tournant autour de l'un de ces rayons, engendreront des volumes dont la différence peut devenir aussi petite qu'on voudra, lorsqu'on multipliera suffisamment le nombre des côtés des polygones.*

Démonstration.—En tirant les rayons BO, CO (*fig.* 151), on voit que le corps engendré par la figure $abcd$O, en tournant autour de l'axe aO, se compose de ceux qu'engendrent les triangles abO, bcO, cdO, et qu'il faut évaluer séparément. Cela posé, si l'on abaisse sur aO la perpendiculaire be, on reconnaîtra que la corde ab et le rayon Ob, en tournant autour de aO, engendrent deux cônes ayant l'un et l'autre pour base le cercle décrit par la perpendiculaire be : la somme de leurs volumes, ou le volume du corps engendré par le triangle abO, sera donc exprimée par $\frac{1}{3} a\text{O} \times \text{cerc. } be$ (275). Cette expression se transforme en une autre où ne se trouve plus le cercle be. On observe d'abord que l'aire du cône engendré par la corde ab a pour expression $\frac{1}{2}\, ab \times \text{circ. } be$ (271); on a aussi (187)

$$\text{cerc. } be = \tfrac{1}{2}\, be \times \text{circ. } be,$$

et il résulte de là

$$\text{aire du cône } ab : \text{cerc. } be :: \tfrac{1}{2} ab \times \text{circ. } be : \tfrac{1}{2}\, be \times \text{circ. } be,$$

ou

$$:: ab : be,$$

en divisant les deux termes du second rapport par $\frac{1}{2}$ circ. be. Si maintenant on abaisse Oh, perpendiculaire sur ab, et que l'on compare entre eux les triangles abe et ahO semblables, puisqu'ils sont rectangles l'un et l'autre, et qu'ils ont de plus un angle commun en a, on obtiendra la proportion

$$ab : be :: aO : Oh,$$

où se trouve encore le rapport $ab : ae$; ainsi

$$\text{aire du cône } ab : \text{cerc. } be :: aO : Oh,$$

et, par conséquent,

$$\text{cerc. } be = \frac{Oh}{aO} \times \text{aire du cône } ab.$$

Par le moyen de cette expression, le volume du corps engendré par le triangle abO, et égal à $\frac{1}{3} aO \times$ cerc. be, deviendra

$$\tfrac{1}{3} Oh \times \text{aire du cône } ab;$$

d'où il résulte que *le volume d'un corps décrit par un triangle qui tourne autour de l'un de ses côtés, a pour mesure le tiers de l'aire du cône engendré par l'un de ses deux autres côtés, multiplié par la perpendiculaire abaissée sur ce côté, de l'angle opposé.*

A l'égard du second triangle bcO, il faut prolonger bc jusqu'à la rencontre de tO; et, d'après ce qui précède, le volume du corps engendré par le triangle ctO étant $\frac{1}{3} Oi \times$ aire du cône ct, tandis que celui du corps engendré par le triangle btO est $\frac{1}{3} Oi \times$ aire du cône bt, la différence de ces expressions ou la mesure du corps engendré par le triangle bcO sera visiblement égale à $\frac{1}{3} Oi \times$ la différence entre l'aire du cône ct et celle du cône bt, différence qui est précisément l'aire du cône tronqué décrit par le côté bc. Les mêmes raisonnements prouveraient aussi que le volume du corps engendré par le triangle cdO est mesuré par $\frac{1}{3} Ol \times$ aire du cône tronqué décrit par cd. En continuant ainsi de proche en proche et en observant que les perpendiculaires Oh, Oi, Ol, etc., sont toutes égales, on voit que, quel que soit le nombre des côtés ab, bc, cd, etc., le volume du corps engendré par le secteur polygonal $abcdO$ aura pour mesure $\frac{1}{3} Ol \times$ la somme des aires décrites par les côtés ab, bc, cd, etc., somme qui n'est autre chose que l'aire décrite par la portion de polygone $abcd$.

En appliquant ce résultat au secteur polygonal circonscrit ABCDO, on trouvera que le volume du corps qu'il engendre est égal à $\frac{1}{3}\text{OL} \times$ aire décrite par la portion de polygone ABCD; et comme il a été prouvé (295) que les aires décrites par les portions correspondantes de polygones réguliers, inscrits et circonscrits, peuvent s'approcher d'aussi près qu'on le voudra, tandis que la différence des apothèmes OL et Ol diminue sans cesse, il en résulte évidemment que les volumes engendrés par le secteur polygonal inscrit et par le secteur polygonal circonscrit, correspondants, tendent aussi sans cesse vers l'égalité, et peuvent en approcher aussi près qu'on voudra.

303. *Corollaire.* — Il est visible que le corps décrit par le secteur circulaire aLdO, et qu'on nomme *secteur sphérique,* est moindre que le corps décrit par le secteur polygonal circonscrit, et plus grand que celui que décrit le secteur polygonal inscrit. Il suit donc du théorème précédent, que la différence entre le volume du premier corps et celui de l'un quelconque des deux autres peut être rendue aussi petite que l'on voudra, en multipliant suffisamment les côtés des polygones.

THÉORÈME.

304. *Le volume d'un secteur sphérique est égal à l'aire de la calotte sur laquelle il s'appuie, multipliée par le tiers du rayon ou à* $\frac{1}{3}$SR, S *désignant cette aire et* R *le rayon.*

Démonstration. — Si P représente l'aire décrite par la portion de polygone circonscrit ABCD, le volume du corps engendré par le secteur polygonal ABCDO sera (302)

$$P \times \frac{1}{3}\text{OL} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{3}\text{PR};$$

nommant à l'ordinaire X la vraie mesure du volume du secteur sphérique, on aura les trois quantités $\frac{1}{3}$PR, $\frac{1}{3}$SR et X placées dans les circonstances du n° 186, et l'on en conclura nécessairement X $=$ $\frac{1}{3}$SR.

Il est évident que l'on connaît par ce résultat le volume du secteur sphérique, puisque son aire S est celle de la calotte décrite par l'arc *ad*.

305. 1er *corollaire*. — Il suit de là que le volume de la sphère est égal à son aire multipliée par le tiers du rayon, puisque si l'on prend, au lieu de l'arc *ad*, le quart de la circonférence ou *am*, le secteur sphérique deviendra égal à la demi-sphère, parce que le rayon *m*O, perpendiculaire sur *a*O, décrira un plan qui partagera la sphère en deux également, et l'on aura pour la moitié ou l'hémisphère supérieur $\frac{1}{2}$ S $\times$ $\frac{1}{3}$*m*O, en prenant S pour l'aire de la sphère entière : réunissant les deux moitiés, le total S $\times$ $\frac{1}{3}$ *m*O sera le volume de la sphère.

L'aire de la sphère étant égale à quatre fois celle d'un de ses grands cercles, ou à quatre cercles, son volume deviendra $\frac{4}{3}$ R $\times$ cercle, ou $\frac{2}{3}$ D $\times$ cercle, c'est-à-dire que *le volume de la sphère est égal à l'aire de son grand cercle, multipliée par les deux tiers du diamètre.*

306. 2^{e} *corollaire*. — Si l'on voulait obtenir le volume engendré par un secteur *a*O*n*, plus grand que le quart de cercle, on retrancherait de la sphère entière le secteur engendré par *n*O*p*, et égal à $\frac{1}{3}$ *m*O $\times$ aire de la calotte décrite par l'arc *np*; la différence serait $\frac{1}{3}$*m*O multiplié par la différence entre l'aire entière de la sphère et celle de la calotte décrite par *np*, différence qui est l'aire décrite par l'arc *amn*, ou celle de la calotte qui sert de base au secteur proposé.

307. 3^{e} *corollaire*. — Le volume de la portion de sphère engendrée par le demi-segment circulaire *a*L*dg*, et que l'on nomme *segment sphérique*, s'obtiendra en retran-

chant du volume du secteur sphérique décrit par le secteur circulaire *aLdO*, celui du cône décrit par le triangle *dgO*.

Quant au volume renfermé entre la zone engendrée par l'arc *dLc* et les plans que décrivent les perpendiculaires *dg*, *cf*, on l'obtiendra en retranchant le segment sphérique décrit par le demi-segment circulaire *acf*, de celui que décrit *adg*.

De la comparaison des corps ronds.

308. Les corps ronds semblables sont ceux qui sont engendrés par des figures semblables : tels sont les cônes SADB et SA′D′B′ (*fig.* 141), engendrés par les triangles semblables ACS, A′C′S.

Il suit du nº 267, que les côtés, les hauteurs et les circonférences des bases des cônes semblables sont proportionnels, et que les aires de leurs bases sont comme les carrés de leurs lignes homologues.

Les cylindres ADBA′D′B′ et *adba′d′b′* (*fig.* 145), engendrés par les rectangles semblables ACC′A′, *acc′a′*, sont aussi semblables; et la similitude de ces figures donnera encore les rapports égaux

$$AA' : aa' :: AC : ac :: \text{circ. } AC : \text{circ. } ac.$$
$$\overline{AA'}^2 : \overline{aa'}^2 :: \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2 :: \text{cerc. } AC : \text{cerc. } ac.$$

Enfin, les cercles étant des figures semblables, les sphères sont aussi des corps semblables.

THÉORÈME.

309. *Les aires des cônes semblables sont comme les carrés des côtés de ces cônes, et leurs volumes comme les cubes de ces mêmes côtés.*

Démonstration. — 1º. Si l'on multiplie par ordre les deux proportions (*fig.* 141)

$$\text{circ. AC} : \text{circ. A}'\text{C}' :: \text{AS} : \text{A}'\text{S},$$
$$\tfrac{1}{2}\,\text{AS} : \tfrac{1}{2}\,\text{A}'\text{S} :: \text{AS} : \text{A}'\text{S},$$

il viendra

$$\tfrac{1}{2}\,\text{AS} \times \text{circ. AC} : \tfrac{1}{2}\,\text{A}'\text{S} \times \text{circ. A}'\text{C}' :: \overline{\text{AS}}^2 : \overline{\text{A}'\text{S}}^2,$$

proportion dont les deux premiers termes expriment les aires des cônes SADB et S'A'D'B' (271).

2°. Si l'on multiplie par ordre les deux proportions

$$\text{cerc. AC} : \text{cerc. A}'\text{C}' :: \overline{\text{AS}}^2 : \overline{\text{A}'\text{S}}^2,$$
$$\tfrac{1}{3}\,\text{CS} : \tfrac{1}{3}\,\text{C}'\text{S} :: \text{AS} : \text{A}'\text{S},$$

on aura

$$\tfrac{1}{3}\,\text{CS} \times \text{cerc. AC} : \tfrac{1}{3}\,\text{C}'\text{S} \times \text{cerc. A}'\text{C}' :: \overline{\text{AS}}^3 : \overline{\text{A}'\text{S}}^3,$$

proportion dont les deux premiers termes expriment les volumes des cônes proposés, SADB, S'A'D'B' (275).

THÉORÈME.

310. *Les aires de deux cylindres semblables sont comme les carrés de leurs côtés, et leurs volumes comme les cubes.*

Démonstration. — 1°. En multipliant par ordre les deux proportions (*fig.* 145)

$$\text{circ. AC} : \text{circ. } ac :: \text{AA}' : aa' \ (308),$$
$$\text{AA}' : aa' :: \text{AA}' : aa',$$

il en résultera

$$\text{AA}' \times \text{circ. AC} : aa' \times \text{circ. } ac :: \overline{\text{AA}'}^2 : \overline{aa'}^2,$$

proportion dont les deux premiers termes expriment les aires des cylindres proposés (280).

2°. Si l'on multiplie par ordre les deux proportions

$$\text{cerc. AC} : \text{cerc. } ac :: \overline{\text{AA}'}^2 : \overline{aa'}^2 \ (308),$$
$$\text{AA}' : aa' :: \text{AA}' : aa',$$

on aura

$$AA' \times \text{cerc. } AC : aa' \times \text{cerc. } ac :: \overline{AA'}^3 : \overline{aa'}^3,$$

proportion dont les deux premiers termes expriment les volumes des cylindres proposés (283).

THÉORÈME.

311. *Les aires de deux sphères sont comme les carrés de leurs rayons ou de leurs diamètres, et leurs volumes comme les cubes de ces mêmes lignes.*

Démonstration. — Soient R et R′ les rayons des sphères proposées, D et D′ leurs diamètres, S et S′ leurs aires, C et C′ les circonférences de leurs grands cercles; on aura, 1°.

$$C : C' :: D : D';$$

multipliant cette proportion par la proportion évidente

$$D : D' :: D : D',$$

il viendra

$$CD : C'D' :: D^2 : D'^2.$$

Or CD et C′D′ désignent les aires des sphères (298); donc

$$S : S' :: D^2 : D'^2$$
$$:: 4R^2 : 4R'^2 :: R^2 : R'^2,$$

en observant que $D = 2R$ et $D' = 2R'$.

2°. Si l'on multiplie par ordre les deux proportions

$$S : S' :: R^2 : R'^2,$$
$$\tfrac{1}{3}R : \tfrac{1}{3}R' :: R : R',$$

on aura

$$\tfrac{1}{3}RS : \tfrac{1}{3}R'S' :: R^3 : R'^3,$$

proportion dont les deux premiers termes expriment les volumes des sphères proposées (305); et comme

$R^3 : R'^3 :: D^3 : D'^3$, on aura pareillement

$$\tfrac{1}{3}RS : \tfrac{1}{3}R'S' :: D^3 : D'^3.$$

312. *Remarque.* — On compare ordinairement la sphère avec le cylindre circonscrit, c'est-à-dire avec le cylindre FGG'F' (*fig.* 150), dont les bases sont égales au grand cercle de la sphère OCC', et dont la hauteur FF' est égale au diamètre de cette même sphère. L'aire de ce cylindre étant mesurée par FF' $\times$ circ. FC (280), est égale à celle de la sphère (298), puisque FF' $=$ CC', et circ. FC $=$ circ. CO.

Le volume du même cylindre, exprimé par FF' $\times$ cerc. FC (283), étant comparé à celui de la sphère, mesuré par $\tfrac{2}{3}$CC' $\times$ cerc. CO (305), il en résulte que ce dernier n'est que les deux tiers de l'autre.

CONCLUSION.

313. Je n'ai donné dans ce qui précède que les propositions nécessaires à la mesure des aires et des volumes; mais la manière d'effectuer les multiplications prescrites par les énoncés ou formules générales, qui complète les règles du *toisé* tant des surfaces que des corps, est suffisamment indiquée dans les art. VIII et suivants du SUPPLÉMENT au *Traité élémentaire d'Arithmétique,* placé en tête du présent Ouvrage. Pour connaître la théorie des intersections des plans et des surfaces courbes qui forme le Complément des Éléments de Géométrie envisagés dans toute leur étendue, les lecteurs pourront recourir aux *Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes* (ou *Éléments de Géométrie descriptive*), 6e édition.

Quant aux corps réguliers, ou polyèdres terminés par des polygones réguliers égaux formant des angles dièdres égaux, ils sont traités avec beaucoup de détail dans la *Géométrie* de Legendre. Je me bornerai à montrer ici que le nombre de ces corps ne saurait surpasser cinq, et qu'ils ne peuvent être formés que par des triangles équilatéraux, ou des carrés, ou des pentagones. Cela se voit en observant que puisque la somme des angles plans qui composent un angle polyèdre doit être moindre que quatre droits (226), on ne peut, avec trois hexagones seulement, former un angle trièdre; car la somme des trois angles plans serait alors égale à quatre droits (82): à plus forte raison, ne saurait-on employer plus de trois hexagones ou des polygones d'un plus grand nombre de côtés. Il suit de là que l'on peut assembler trois, quatre ou cinq triangles équilatéraux pour former chaque angle polyèdre, et seulement trois carrés ou trois pentagones, ce qui fournit en effet cinq corps.

Celui dont les angles sont trièdres et les faces triangulaires, est le *tétraèdre régulier*, formé de quatre triangles équilatéraux (*fig.* 152).

L'*octaèdre* régulier a ses angles tétraèdres, et est formé par huit triangles équilatéraux (*fig.* 153).

L'*isocaèdre* a ses angles pentaèdres, et est formé par vingt triangles équilatéraux (*fig.* 154).

L'*héxaèdre* ou *cube* a ses angles trièdres, et est formé par six carrés égaux (*fig.* 155).

Le *dodécaèdre* a aussi ses angles trièdres, et est formé par douze pentagones (*fig.* 156).

FIN.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE D'ALGÈBRE; par M. MAYER, Chef d'une Institution polytechnique, et M. CHOQUET, Professeur de Mathématiques; 1 vol. in-8°, 4e édition .... 7 fr. 50 c.

TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE à l'usage de la Marine et de l'Artillerie par BEZOUT; avec des Notes fort étendues et des Tables de Logarithmes, pour les élèves qui se destinent à l'École Polytechnique, par le baron *Reynaud*, ex-examinateur des candidats de l'École Polytechnique, de l'École spéciale militaire; in-8°, 20e édition stéréotype, 1839...... 3 fr. 50 c.
Le texte pur se vend séparément............ .... 2 fr.

— Le même, suivi des Tables des poids et mesures et de Tables de Logarithmes, depuis 1 jusqu'à 10 000: in-8°..... .... 2 fr. 50 c.
Les Notes se vendent aussi séparément.................. 2 fr. 50 c.

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE ET DE TRIGONOMÉTRIE, à l'usage des candidats aux Ecoles Polytechnique, Militaire, Navale et Forestière; par M. GOURÉ, Censeur des études au collége de Douai. — *Ouvrage adopté par l'Université*. In-8°, 3e édition, 1846..................... 7 fr.

ÉLÉMENTS DE STATIQUE, adoptés pour l'instruction publique, suivis de quatre Mémoires: sur la composition des Moments et des Aires, sur le plan invariable du Système du Monde, sur la Théorie générale de l'équilibre et du mouvement des Systèmes, et sur une *Théorie nouvelle de la rotation des corps*; par M. POINSOT, Membre de l'Institut, etc.; 9e édition, considérablement augmentée, in-8°, avec planches, 1848.... 6 fr. 50 c.

ARITHMÉTIQUE à l'usage des élèves qui se destinent à l'École Polytechnique et à l'École Militaire; par le baron REYNAUD; 24e édition, augmentée d'une Table des Logarithmes des nombres entiers, depuis un jusqu'à dix mille; 1 vol. in-8°, 1846.............................. .... 5 fr.

TRAITÉ D'ALGÈBRE, à l'usage des Élèves qui se destinent à l'École Polytechnique et à l'Ecole spéciale militaire; par *le même*; in-8°, 10e édition ... . 5 fr.

ÉLÉMENTS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DE CALCUL INTÉGRAL; par M. BOUCHARLAT; 5e édition, revue et augmentée, in-8°, avec 5 planches.. 8 fr.

ÉLÉMENTS DE MÉCANIQUE; par *le même*; in-8°, 3e édition, corrigée et augmentée, avec planches, 1840.......................... 8 fr.

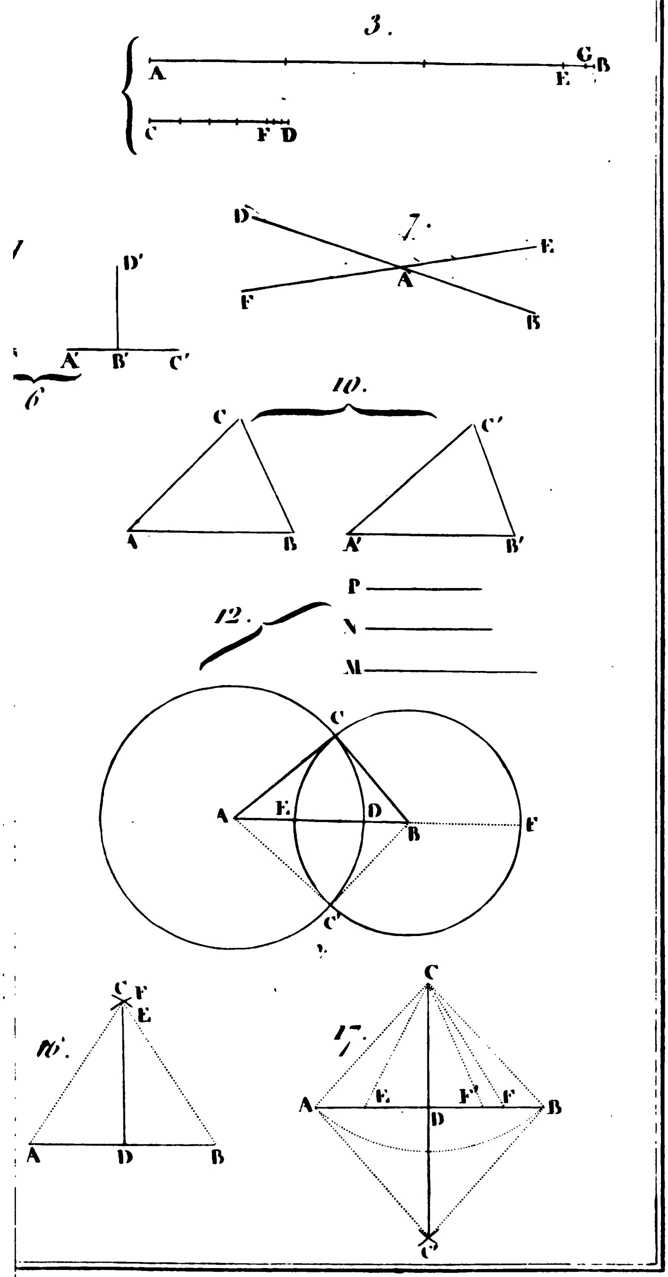
THÉORIE DES COURBES ET DES SURFACES DU SECOND ORDRE, ou Traité complet d'application de l'Algèbre à la Géométrie; par M. BOUCHARLAT, 3e édition; fort vol. in-8°, avec 14 planches, 1845...... 9 fr.

TRAITÉ DE MÉCANIQUE; par POISSON; 2e édition, considérablement augmentée, 2 forts vol. in-8°........... .... 18 fr.

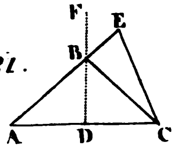
COURS D'ANALYSE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE; par M. DUHAMEL, Directeur des Etudes à cette Ecole, etc.; 2e édit., 2 vol. in-8°, 1847. 10 fr.

COURS DE MÉCANIQUE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE; par *le même*; 2 vol. in-8°, 1845 et 1846................................ 11 fr.

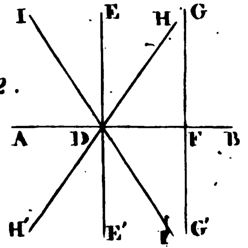
ÉLÉMENTS DE TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE; par MM. DELISLE, Examinateur d'admission à l'Ecole navale, Professeur de mathématiques spéciales au collége Saint-Louis, et GÉRONO, Professeur de mathématiques; 2e édition, 1848, in-8°, avec planches... 3 fr. 50 c.


3.
A
E
G
B
C
F
D
7.
D
E
A
F
B
D′
A′
B′
C′
6.
10.
C
A
B
C′
A′
B′
12.
P
N
M
C
A
E
D
B
F
C′
C F
E
16.
A
D
B
17.
C
A
E
F′
F
B
D
C′

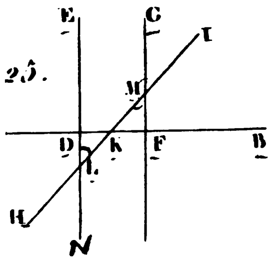
21.



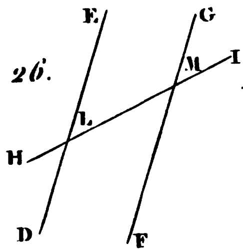
22.



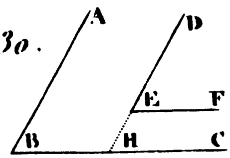
25.



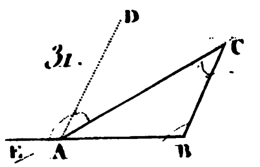
26.



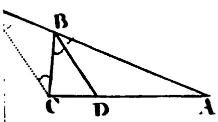
30.

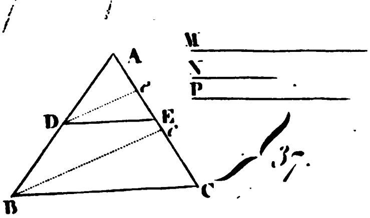


31.



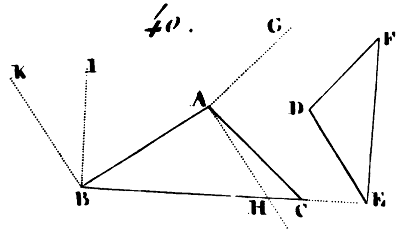
36.



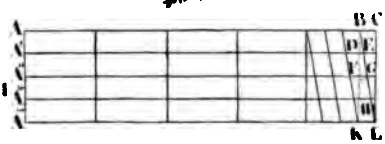


37.

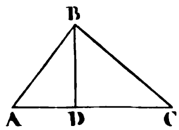
40.


G
F
K
I
A
D
B
H
C
E

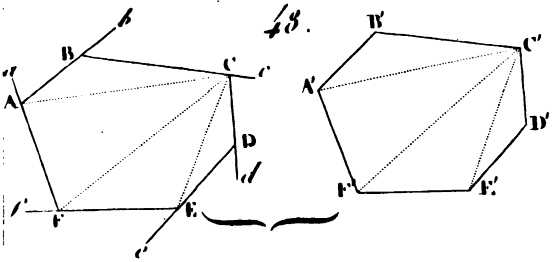
43.

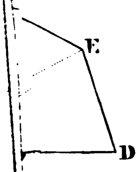

B C
D E
F G
H
K L

44.

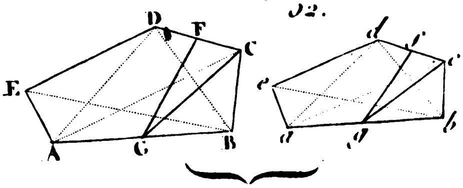

B
A
D
C

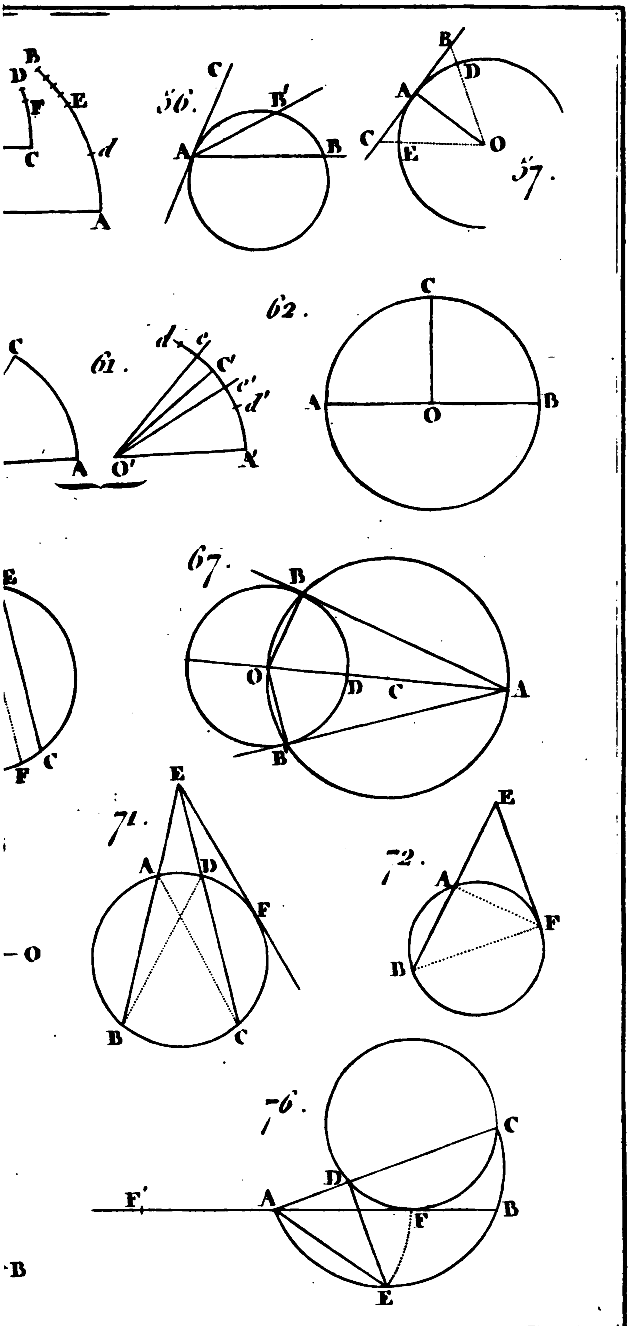
48.

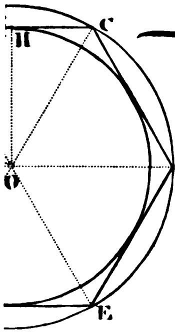

b
B
a
C
c
A
D
d
f
F
E
e
B'
C'
A'
D'
F'
E'


E
D

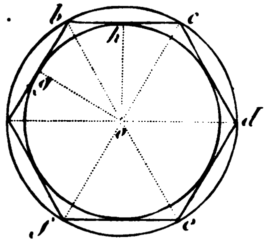
52.

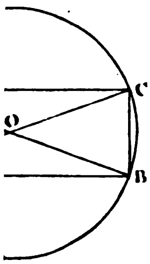

D
F
C
E
A
G
B
d
f
c
e
b
a
g


56.
57.
61.
62.
67.
71.
72.
76.

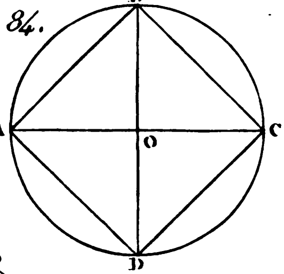


79.

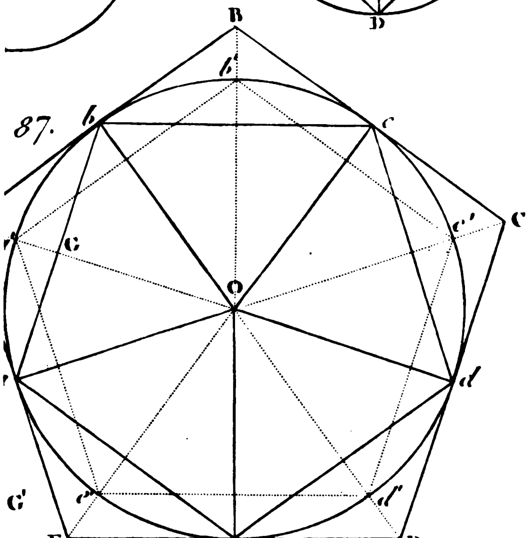


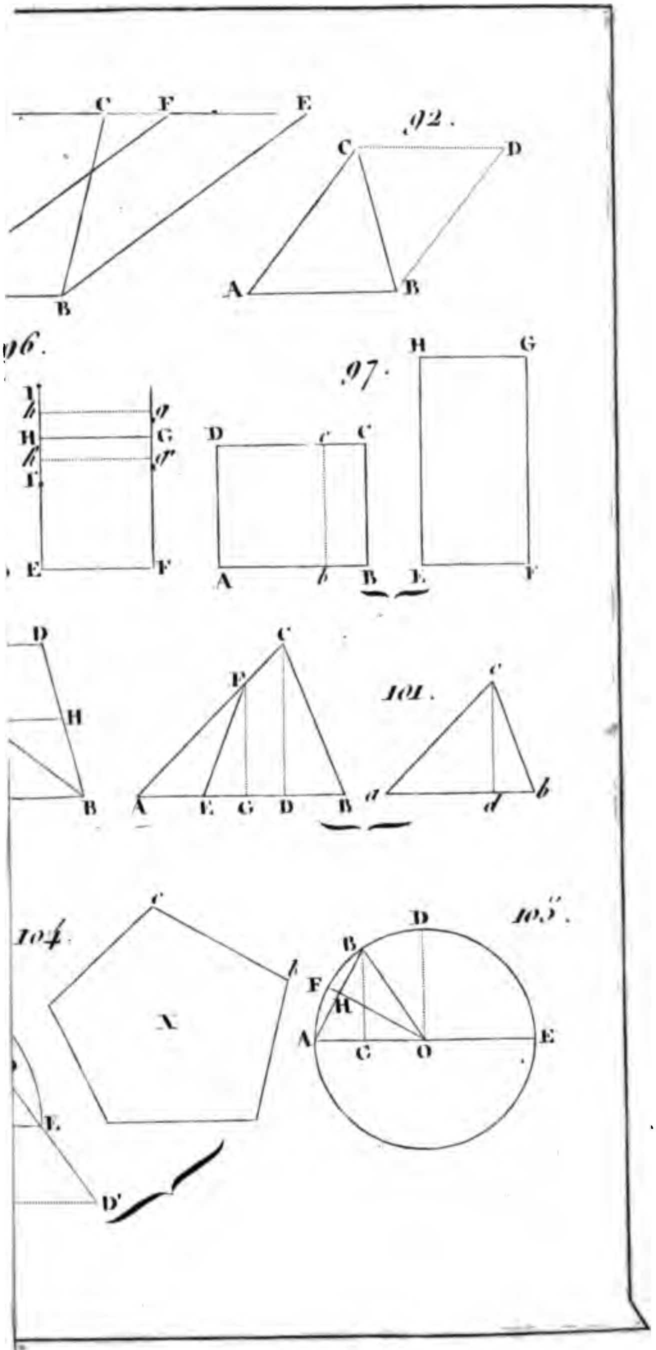


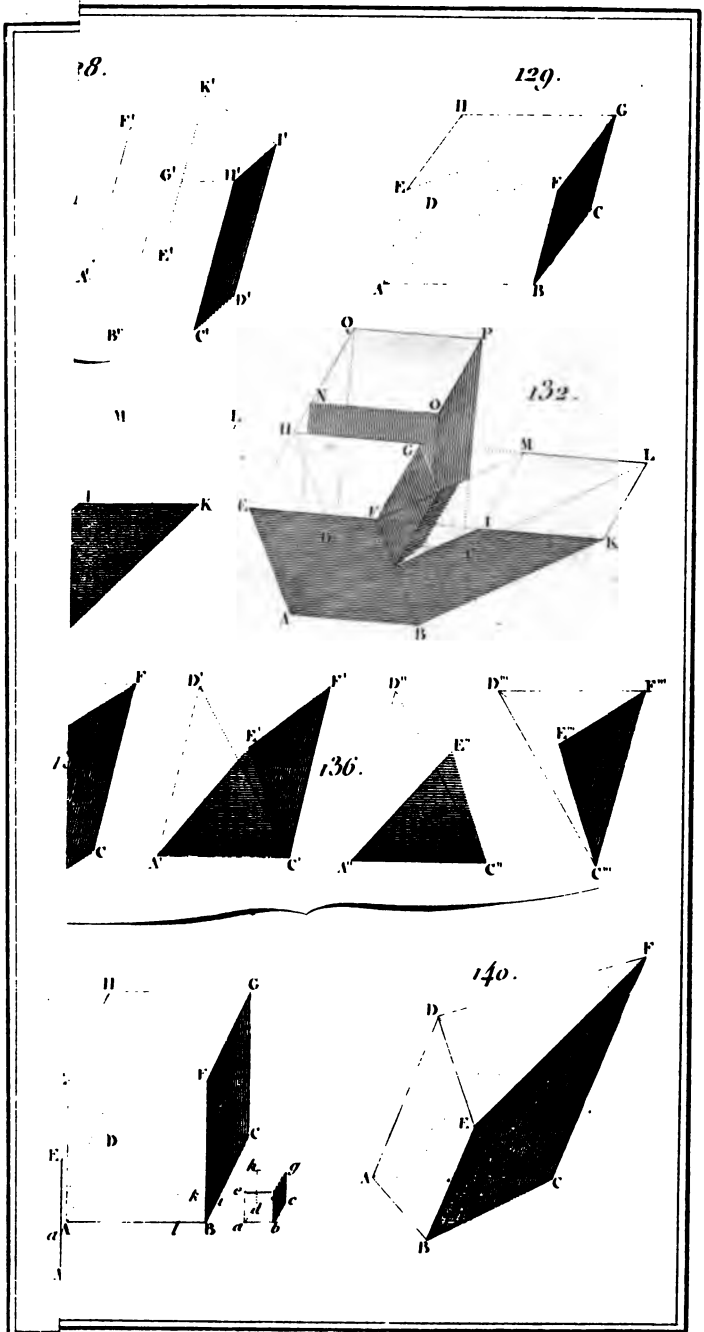
84.



87.

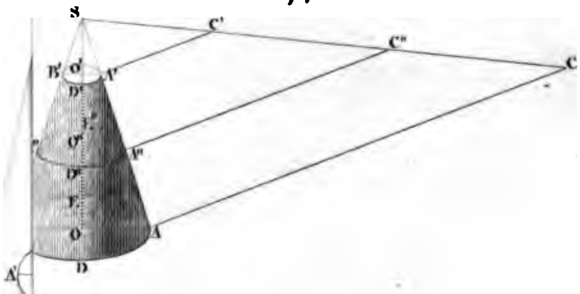



92.
96.
97.
101.
104.
105.

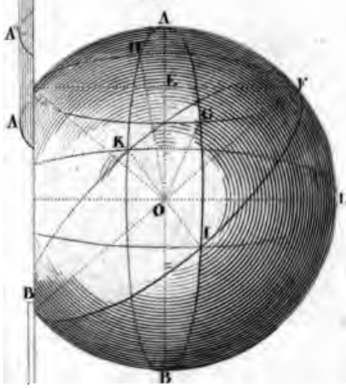


Gravé par Adam

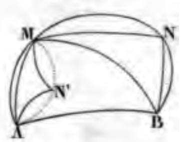
144.



148.

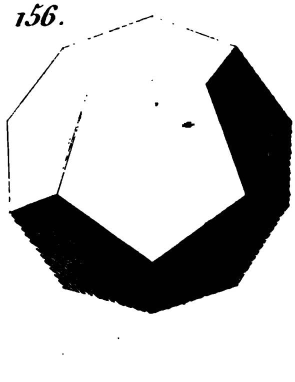


149.



155.

156.



Gravé par Adam.